Homographies et birapport

Exercice 1 (Le groupe des homographies.) On appelle *homographie* une application du plan complexe dans lui-même de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d sont quatre complexes tels que $ad - bc \neq 0$.

(1) Indiquez l'ensemble de définition et l'image d'une homographie.
(2) Montrez qu'une homographie se prolonge de manière naturelle en une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dorénavant, par le terme d'*homographie*, on entendra une transformation $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la forme précédente.

(3) Montrez que l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies possède une structure naturelle de groupe et que ce groupe est engendré par les similitudes directes et par l'application $z \mapsto 1/z$.
(4) À la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ on associe l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Montrez que ceci définit un morphisme de groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$. Déterminez son image et son noyau.

Exercice 2 (Le birapport.)
(1) Soient a, b, c dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts. Montrez qu'il existe une unique homographie h envoyant a, b, c sur $0, 1, \infty$. On supposera pour simplifier qu'aucun des points a, b, c n'est égal au point à l'infini.

Soient a, b, c, d quatre éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont les trois premiers sont distincts. La valeur $h(d) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, où h est l'homographie de la question précédente, est appelée le *birapport* de a, b, c, d et notée $[a, b, c, d]$.

(2) Soit $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Calculez $[0, 1, \infty, z]$.

(3) Montrez que le birapport est invariant par homographie, c'est-à-dire que si f est une homographie, alors $[f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d]$. (*Considérez l'homographie hf^{-1} où h est l'homographie de la première question.*)

(4) Donnez une formule pour le birapport $[a, b, c, d]$.

Exercice 3 (Symétries du birapport.) Soient a, b, c, d quatre éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dont les trois premiers sont distincts.
(1) Montrez que $[c, d, a, b] = [a, b, c, d]$. (*Considérez l'homographie $\frac{[a,b,c,d]}{h}$ où h est l'unique homographie qui envoie a, b, c sur $0, 1, \infty$.*)

(2) Montrez que $[a, d, c, b] = [a, b, c, d]^{-1}$. (*Considérez l'homographie $\frac{1}{[a,b,c,d]}\, h$.*)

(3) Montrez que $[b, a, c, d] = 1 - [a, b, c, d]$. (*Considérez l'homographie...*)

Exercice 4 Montrez qu'une application $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui laisse invariant le birapport de quatre points est une homographie.

Exercice 5 (Cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.) Dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la réunion d'une droite de $\mathbb{C}$ et du point ∞ est appelée un *cercle de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *passant par* ∞. La famille des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est donc constituée des cercles passant par ∞, que l'on vient de définir, et des cercles ne passant pas par l'infini, qui sont les cercles ordinaires dans $\mathbb{C}$. Cette terminologie est justifiée par le fait que la projection stéréographique envoie les cercles tracés sur la sphère S^2 sur les cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au sens où l'on vient de les définir. Dans cet exercice, on souhaite démontrer que les homographies préservent la famille des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et en application, donner une condition de cocyclicité.
(1) On veut montrer que $h(\mathcal{C})$ est un cercle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, pour tout cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et pour toute homographie h. Montrez qu'il suffit d'établir ce résultat pour $h(z) = 1/z$, ce que l'on supposera dans la suite.
(2) Montrez qu'on peut se ramener au cas où $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe réel. (*Poser* $g(z) = e^{i\theta}z$ *et calculer* ghg.)
(3) Montrez que $h(\mathcal{C})$ est un cercle, en distinguant quatre cas :

$$\infty \notin \mathcal{C} \text{ et } 0 \in \mathcal{C} \quad ; \quad \infty \in \mathcal{C} \text{ et } 0 \notin \mathcal{C} \quad ; \quad \infty \notin \mathcal{C} \text{ et } 0 \notin \mathcal{C} \quad ; \quad \infty \in \mathcal{C} \text{ et } 0 \in \mathcal{C}.$$

(*Méfiez-vous car le centre de* $h(\mathcal{C})$ *n'est pas forcément l'image par* h *du centre de* $\mathcal{C}$.)
(4) Montrez que quatre nombres complexes a, b, c, d sont cocycliques ou alignés ssi leur birapport est réel.