Matrices réelles qui sont des exponentielles

La décomposition $D + N$ usuelle a un analogue multiplicatif, pour les matrices inversibles, qui est une décomposition « diagonalisable × unipotent ». Rappelons qu'une matrice U est dite *unipotente* si sa seule valeur propre est 1, ou dit autrement, si $U - \mathrm{Id}$ est nilpotente. L'*indice d'unipotence* de U est défini comme étant égal à l'indice de nilpotence de $U - \mathrm{Id}$. Voici en exercice cette décomposition :

Exercice 1 : Montrez que pour tout $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un couple unique (D, U) tel que $G = DU$ avec D diagonalisable, U unipotent, et $DU = UD$.

Exercice 2 : On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est *semi-simple* si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. (Plus généralement une matrice carrée à coefficients dans un corps k est dite semi-simple si elle est diagonalisable sur une clôture algébrique de k).

(1) Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, montrez qu'il existe un unique couple (S, N) composé d'une matrice semi-simple S, une matrice nilpotente N, telles que $M = S + N$ et $SN = NS$.

Indication : commencez par écrire la décomposition $D + N$ de M dans $\mathbb{C}$.

(2) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrez qu'il existe un unique couple $(S, U) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ composé d'une matrice semi-simple S, une matrice unipotente U, telles que $M = SU$ et $SU = US$.

(*Indication : commencez par écrire la décomposition $S + N$ de M.*)

Exercice 3 : Soit S une matrice semi-simple réelle, et $S = PDP^{-1}$ avec D diagonale complexe. Montrez que D et la matrice conjuguée $\overline{D}$ sont semblables. Quelle matrice de similitude M peut-on choisir ? Montrez que S est réelle si et seulement si $P^{-1}\overline{P}M^{-1}$ est diagonale par blocs, les blocs ayant des tailles que l'on précisera.

Exercice 4 : La résolution de cet exercice nécessite d'avoir fait le précédent. On veut montrer que $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une matrice $Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $X = Y^2$.

(1) Montrez que si X est l'exponentielle d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ alors c'est le carré d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on suppose que $X = Y^2$ et on écrit la décomposition $Y = SU$ en produit commutatif semi-simple par unipotent.

(2) La matrice U^2 est-elle l'exponentielle d'une matrice réelle N ?

(3) Utilisez l'exercice précédent pour montrer que S^2 est l'exponentielle d'une matrice semi-simple T.

(*Indic : On écrit $S = PDP^{-1}$. Définissez $\log(D^2)$ puis montrez que $T = P(\log(D^2))P^{-1}$ est réelle. Attention aux valeurs propres qui ont même carré !*)

(4) Montrez que T et $N = \log(U^2)$ commutent. Concluez.

Corrigé

Exercice 1 : On écrit la décomposition $G = D + N$ avec $DN = ND$. Comme G est inversible, ses valeurs propres qui sont aussi celles de D sont non nulles, donc D est inversible. Alors $G = D + N = D(\mathrm{Id} + D^{-1}N)$. Comme D et N commutent, $D^{-1}N$ est nilpotente donc $U := \mathrm{Id} + D^{-1}N$ est unipotente. Il est facile de vérifier que $DU = UD$. Noter qu'on retrouve la décomposition de départ grâce à $N = D(U - \mathrm{Id})$, ce qui permet de montrer l'unicité (faites-le).

Exercice 2 :

Exercice 3 : En séparant les valeurs propres réelles λ_j et les valeurs propres complexes conjuguées z_k, $\overline{z}_k$, on a :

$$D = \mathrm{diag}\Big((\lambda_1, a_1), \dots, (\lambda_r, a_r), (z_1, b_1), (\overline{z}_1, b_1), \dots, (z_s, b_s), (\overline{z}_s, b_s)\Big)$$

C'est une matrice diagonale par blocs, les blocs étant des homothéties de rapports tous distincts. Leurs tailles sont données par les multiplicités : $a_1, \dots, a_r, b_1, b_1, \dots, b_s, b_s$ ce que l'on note en abrégé $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$. Pour conjuguer on permute juste les valeurs propres complexes :

$$D = \mathrm{diag}\Big((\lambda_1, a_1), \dots, (\lambda_r, a_r), (\overline{z}_1, b_1), (z_1, b_1), \dots, (\overline{z}_s, b_s), (z_s, b_s)\Big)$$

Notons σ la permutation qui est l'identité sur les r premiers entiers et qui échange les suivants par paires, et $M = M_\sigma$ la matrice de permutation associée. On a donc $\overline{D} = M^{-1}DM$. Or S est réelle ssi $\overline{S} = S$ càd $\overline{P}\,\overline{D}\,\overline{P}^{-1} = PDP^{-1}$. Comme $\overline{D} = M^{-1}DM$ cela donne

$$\overline{P}M^{-1}DM\overline{P}^{-1} = PDP^{-1}$$

c'est-à-dire que $P^{-1}\overline{P}M^{-1}$ commute avec D. Vue la forme de D, ceci équivaut à dire que $P^{-1}\overline{P}M^{-1}$ est diagonale par blocs de type $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$.

Exercice 4 : (1) Si $X = \exp(Z)$ alors $X = \exp(\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}Z) = (\exp(\frac{1}{2}Z))^2$.

(2) On sait que l'exponentielle réalise un homéomorphisme entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes. Donc il existe une unique matrice nilpotente N telle que $U = \exp(N)$. La question qui se pose est de savoir si N est réelle. En fait, l'homéomorphisme inverse est explicite et montre bien que N est réelle :

$$N = \log(U) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(U - \mathrm{Id})^k$$

(3) Soit $S = PDP^{-1}$ et (λ_j, a_j) et (z_k, b_k), $(\overline{z}_k, b_k)$ les valeurs propres pondérées. D'après l'exercice précédent, il existe une matrice de permutation M (adaptée aux multiplicités) telle que $P^{-1}\overline{P}M^{-1}$ commute avec D, i.e. est diagonale par blocs de type $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$. On a :

$$D^2 = \mathrm{diag}\Big((\lambda_1^2, a_1), \dots, (\lambda_r^2, a_r), (z_1^2, b_1), (\overline{z}_1^2, b_1), \dots, (z_s^2, b_s), (\overline{z}_s^2, b_s)\Big)$$

Il faut prendre garde que l'écriture ci-dessus ne reflète plus forcément ni la séparation entre valeurs propres réelles et non réelles, ni les multiplicités (qu'il est important de compter pour identifier les matrices qui commutent). Notons $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Définissons la matrice diagonale

$$\log(D^2) = \operatorname{diag}\left((\log \lambda_1^2, a_1), \dots, (\log \lambda_r^2, a_r), (\log \rho_1^2 + 2i\theta_1, b_1), (\log \rho_1^2 - 2i\theta_1, b_1), \dots\right)$$

L'existence éventuelle de deux valeurs propres opposées fait augmenter les multiplicités lors du passage au carré. Quoi qu'il en soit, $\log(D^2)$ est encore diagonale par blocs homothétiques selon le découpage $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$. (Le type $\underline{a}'$ est éventuellement plus grossier que $\underline{a}$.) Comme $P^{-1}\overline{P}M^{-1}$ est diagonale par blocs de type $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$ elle commute avec $\log(D^2)$. De plus M échange les valeurs propres complexes de $\log(D^2)$ et leurs conjuguées, donc

$$\overline{\log(D^2)} = M^{-1} \log(D^2) M$$

Il s'ensuit que $P(\log(D^2))P^{-1}$ est réelle (cf exercice précédent). On pose $T = P(\log(D^2))P^{-1}$. On a

$$\exp(T) = P \exp(\log(D^2))P^{-1} = PD^2P^{-1} = S^2$$

(4) Dans la décomposition $Y = SU$, U commute avec S. Donc $P^{-1}U^2P$ commute avec $P^{-1}S^2P = D^2$, i.e. elle est diagonale par blocs de type $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{b})$. En prenant le logarithme comme dans la question (2) on obtient que $P^{-1}NP$ est diagonale par blocs de même type. Donc elle commmute avec $P^{-1}(\log D^2)P$ c'est-à-dire avec T. Il s'ensuit que

$$\exp(T + N) = \exp(T)\exp(N) = P\exp(\log D^2)P^{-1}\exp(N) = S^2U^2 = M$$

Bibliographie :

[Gou] Gourdon, Les Maths en tête, Mathématiques pour M', *Ellipses*.

[MT] Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann*.