Rotations et homographies

Le thème des deux exercices qui suivent est de décrire un morphisme injectif de groupes $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Dans le premier exercice, on construit un tel morphisme en utilisant la projection stéréographique $\sigma : S^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dans le deuxième exercice, on utilise les quaternions. On peut montrer qu'en fait, ces deux constructions sont les mêmes, si l'on identifie correctement les objets de part et d'autre.

Exercice 1 On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ identifié à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, sa sphère unité S^2, et le plan équatorial $\mathbb{C}$. La *projection stéréographique* $\sigma : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$ est la projection depuis le pôle nord N, définie par $\sigma(M) = (NM) \cap \mathbb{C}$ et $\sigma(N) = \infty$.

(1) On note $(z,t) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point $M \in E$. Donnez l'expression de σ et σ^{-1} dans ces coordonnées.

(2) Le plan tangent en un point de S^2 étant orienté par la normale sortante en ce point, on note f_θ la rotation de E d'axe $[ON)$ et d'angle θ, et g_φ la rotation de E d'axe $[Ox)$ et d'angle φ. Justifiez que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les rotations f_θ et g_φ.

(3) Une rotation $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ induit une bijection $\widetilde{r} := \sigma^{-1} \circ r \circ \sigma$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Calculez $\widetilde{f_\theta}$ et montrez que

$$\widetilde{g_\varphi}(z) = -i \ \frac{z\cos(\frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{\varphi}{2})}{z\sin(\frac{\varphi}{2}) - i\cos(\frac{\varphi}{2})} \ .$$

Déduisez-en que pour tout $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, la bijection $\widetilde{r}$ est une homographie. Montrez que $r \mapsto \widetilde{r}$ définit un morphisme de groupes injectif $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Corrigé. (1) Cf feuille d'exercices sur la droite projective : on avait trouvé

$$\sigma(z,t) = \frac{z}{1-t} \quad \text{et} \quad \sigma^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \ .$$

(2) Soit r une rotation, x un vecteur directeur de son axe, et ψ son angle. Il existe θ et φ tels que $x = (f_\theta g_\varphi)(N)$. Donc $(f_\theta g_\varphi)^{-1} \circ r \circ (f_\theta g_\varphi)$ est la rotation d'axe $[ON)$ et d'angle ψ, autrement dit, c'est f_ψ. Il s'ensuit que $r = (f_\theta g_\varphi) \circ f_\psi \circ (f_\theta g_\varphi)^{-1}$, ce qui démontre que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les rotations f_θ et g_φ.

(3) On a $f_\theta(z,t) = (e^{i\theta}z, t)$ d'où $\widetilde{f_\theta}(z) = e^{i\theta}z$. C'est une homographie. Passons à g_φ : matriciellement, on a

$$Mat(g_\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \ .$$

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on a

$$g_\varphi(\sigma^{-1}(z)) = g_\varphi\left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b\cos(\varphi) - (a^2+b^2-1)\sin(\varphi)}{a^2+b^2+1}, \frac{2b\sin(\varphi) + (a^2+b^2-1)\cos(\varphi)}{a^2+b^2+1}\right)$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_\varphi(z) &= \frac{2a + i(2b\cos(\varphi) - (a^2+b^2-1)\sin(\varphi)}{a^2+b^2+1-2b\sin(\varphi)-(a^2+b^2-1)\cos(\varphi)} \\
&= \frac{-2i\big(a\sin(\frac{\varphi}{2}) + i(-b\sin(\frac{\varphi}{2}) + \cos(\frac{\varphi}{2})\big)\big(a\cos(\frac{\varphi}{2}) + i(b\cos(\frac{\varphi}{2}) + \sin(\frac{\varphi}{2})\big)}{2\ |a\sin(\frac{\varphi}{2}) + i(b\sin(\frac{\varphi}{2}) - \cos(\frac{\varphi}{2})|^2} \\
&= -i\ \frac{z\cos(\frac{\varphi}{2}) + i\sin(\frac{\varphi}{2})}{z\sin(\frac{\varphi}{2}) - i\cos(\frac{\varphi}{2})}\ .
\end{aligned}$$

Les rotations f_θ et g_φ engendrent $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, elles induisent des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ via σ, donc toute rotation $r \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ induit une homographie. Ceci donne un morphisme de groupes injectif $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 2 *À venir... Pour la construction de* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *via les quaternions, voir la note sur les sous-groupes finis de* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Corrigé.