Somme des traces dans une représentation

Exercice. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G dans un espace vectoriel complexe de dimension finie V. Montrez que la quantité $\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g)$ est un entier relatif.

Solution. Nous utiliserons le fait suivant.

Lemme. *Si $d \mid n$, le morphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ est surjectif.*

Preuve. Traitons d'abord le cas où $n = p^\alpha$ est puissance d'un nombre premier p. Alors $d = p^\beta$ pour un certain $\beta \leqslant \alpha$, et la classe de $e \in \mathbb{Z}$ modulo p^β est inversible si et seulement si e est premier à p, si et seulement si la classe de e modulo p^α est inversible. Ceci montre le lemme dans ce cas. En général, soient $n = \prod_p p^{\alpha_p}$ et $d = \prod_p p^{\beta_p}$ les décompositions en facteurs premiers, avec $\beta_p \leqslant \alpha_p$. Le théorème des restes chinois donne des isomorphismes

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \prod (\mathbb{Z}/p^{\alpha_p}\mathbb{Z})^\times \quad , \quad (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \simeq \prod (\mathbb{Z}/p^{\beta_p}\mathbb{Z})^\times$$

par lesquels l'application de réduction $\pi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ est le produit des applications $\pi_p : (\mathbb{Z}/p^{\alpha_p}\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p^{\beta_p}\mathbb{Z})^\times$. Le résultat se déduit alors du cas particulier. $\square$

Passons à l'exercice proprement dit.

Première solution. Notons g au lieu de $\rho(g)$, pour simplifier. Soit n le cardinal de G. Comme $g^n = 1$ pour tout $g \in G$, on obtient $g^n = \mathrm{id}$ dans $\mathrm{GL}(V)$ donc toutes les valeurs propres de g sont des racines n-ièmes de l'unité. Notons μ_n (resp. $\mu_n^\times$) l'ensemble des racines (primitives) n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Notons $m_g(\lambda)$ la multiplicité de λ dans le spectre de g ; on convient que $m_g(\lambda) = 0$ si λ n'est pas valeur propre. On a alors :

$$\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g) = \sum_{g\in G}\sum_{\lambda\in\mu_n} m_g(\lambda)\lambda = \sum_{\lambda\in\mu_n}\sum_{g\in G} m_g(\lambda)\lambda = \sum_{d\mid n}\sum_{\lambda\in\mu_d^\times}\left(\sum_{g\in G} m_g(\lambda)\right)\lambda.$$

Montrons que, pour $\lambda \in \mu_d^\times$, la quantité $N(\lambda) := \sum_{g\in G} m_g(\lambda)$ ne dépend que de d. En effet, si $\lambda, \mu \in \mu_d^\times$ alors il existe un entier i premier à d tel que $\mu = \lambda^i$. D'après le lemme ci-dessous, on peut choisir i premier à n et dans ce cas, l'application $g \mapsto g^i$ est une bijection de G, d'inverse $g \mapsto g^j$ où j est un inverse de i modulo n. Comme par ailleurs $m_{g^i}(\lambda^i) \geqslant m_g(\lambda)$, on a :

$$N(\lambda) = \sum_{g\in G} m_g(\lambda) \leqslant \sum_{g\in G} m_{g^i}(\lambda^i) = \sum_{g\in G} m_{g^i}(\mu) = \sum_{g\in G} m_g(\mu) = N(\mu).$$

Par symétrie, on a aussi $N(\mu) \leqslant N(\lambda)$ donc finalement ces quantités sont égales à un entier N_d ne dépendant que de d. Alors :

$$\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g) = \sum_{d\mid n}\sum_{\lambda\in\mu_d^\times} N_d\,\lambda = \sum_{d\mid n} N_d \sum_{\lambda\in\mu_d^\times} \lambda$$

On reconnaît que $\sum_{\lambda\in\mu_d^\times}\lambda$ est l'opposé du coefficient de $X^{\varphi(d)-1}$ dans le polynôme cyclotomique Φ_d. Or on sait que $\Phi_d\in\mathbb{Z}[X]$, donc ce coefficient est entier relatif et on a terminé.

Deuxième solution, sur une idée de Lionel Fourquaux. Comme G est d'ordre n, la formule $i.g := g^i$ définit une action du groupe $U=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sur G par bijections. Pour montrer que $\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(g)$ est entier, il suffit de montrer que chaque somme $\sum_{g\in\omega}\operatorname{tr}(g)$, portant sur les éléments d'une orbite ω pour l'action ci-dessus, est un entier. Supposons que ω est l'orbite d'un élément $\gamma\in G$ d'ordre d. Le stabilisateur H de γ est l'ensemble des $i\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tels que $\gamma^i=\gamma$, c'est-à-dire tels que d divise $i-1$, ou encore que i est congru à 1 modulo d. Autrement dit, H est le noyau du morphisme de réduction $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$. Comme H est distingué, le groupe quotient U/H agit sur ω qui devient alors une orbite *libre* sous ce groupe, c'est-à-dire que l'application $U/H\to\omega$, $i\mapsto\gamma^i$ est une bijection. Comme le morphisme de réduction $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ est surjectif (par le lemme), le quotient U/H s'identifie à $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$. Ces réflexions montrent que :

$$\sum_{g\in\omega}\operatorname{tr}(g)=\sum_{i\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\operatorname{tr}(\gamma^i).$$

Comme les γ^i commutent entre eux, ils sont simultanément diagonalisables. Après diagonalisation, un élément de la diagonale est un $\lambda\in\mu_e^\times$ avec $e\mid d$. La somme sur i nous mène à considérer $\sum_{i\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\lambda^i$, qui est égale à :

$$\operatorname{card}\big(\ker((\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times)\big)\times\sum_{j\in(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times}\lambda^j.$$

Enfin on note que $\sum_{j\in(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times}\lambda^j$ est un coefficient du polynôme cyclotomique Φ_e, donc c'est un entier. Ceci termine la démonstration.

Troisième solution, sur une idée de Pierre Charollois. Cette solution est à la fois la plus simple et celle qui donne le résultat le plus précis. Notons $\Delta=\sum_{g\in G}\rho(g)$, ou plus simplement $\Delta=\sum_{g\in G}g$, la somme des endomorphismes de V associés aux éléments de G par la représentation. Le carré de cet endomorphisme vaut :

$$\Delta^2=\left(\sum_{h\in G}h\right)\left(\sum_{k\in G}k\right)=\sum_{h,k\in G}hk=n\sum_{g\in G}g=n\Delta$$

puisque le nombre de couples (h,k) tels que $hk=g$ est égal à n. Ainsi Δ est annulé par le polynôme $X^2-nX=(X-n)X$, donc les facteurs irréductibles de son polynôme minimal sont dans la liste $\{X-n,X\}$. Son polynôme caractéristique, qui possède les mêmes facteurs irréductibles, est donc de la forme $(X-n)^iX^{d-i}$ où $d=\dim(V)$ est le degré (ou dimension) de la représentation, et $0\leqslant i\leqslant d$. La trace est l'opposé du coefficient de X^{d-1} dans ce polynôme, c'est-à-dire :

$$\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(g)=\operatorname{tr}(\Delta)=in.$$

On voit ainsi que $\sum_{g\in G}\operatorname{tr}(g)$ est en fait un entier naturel, divisible par le cardinal de G.