Sous-groupe engendré par les matrices diagonalisables

Soit $G = \mathrm{GL}_n(k)$ où k est un corps et $n \geqslant 1$ un entier. On note H le sous-groupe engendré par les matrices diagonalisables. On veut démontrer qu'on a l'alternative suivante :

$$H = \begin{cases} \mathrm{GL}_n(k) & \text{si } k \neq \mathbb{F}_2, \\ \{1\} & \text{si } k = \mathbb{F}_2. \end{cases}$$

(1) On suppose que $k = \mathbb{F}_2$. Démontrez que $H = \{1\}$.

(2) On suppose que $k \neq \mathbb{F}_2$.

(a) On suppose que $\mathrm{card}(k) \geqslant n+1$. Démontrez que $H = \mathrm{GL}_n(k)$.

(b) Utilisant le résultat de (a) pour $n = 2$, démontrez que les transvections appartiennent à H (*Indication : on rappelle que les transvections sont toutes conjuguées dans* G).

(c) Concluez que $H = G$.

On propose de donner une nouvelle démonstration du fait que $H = G$ lorsque $k \neq \mathbb{F}_2$, en utilisant le résultat suivant : *mis à part le cas de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$, *les sous-groupes distingués de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *se répartissent en deux familles : les sous-groupes inclus dans le centre, et les sous-groupes qui contiennent* $\mathrm{SL}_n(k)$. On se place donc désormais dans le cas $k \neq \mathbb{F}_2$, et on écarte le cas où $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$.

(3) Démontrez que H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(k)$.

(4) Démontrez que H contient strictement le centre.

(5) Concluez avec le résultat cité ci-dessus.

Le résultat sur les sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}_n(k)$ fait l'objet de la feuille d'exercices suivante :

`https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/exo/sous_groupes_distingues_de_SLn_et_GLn.pdf`.