Symétries du Sudoku

Les grilles de Sudoku standard sont composées de 9 blocs de taille 3×3, dont on doit remplir les cases avec les chiffres de 1 à 9 de telle sorte qu'un chiffre n'apparaisse qu'une fois dans chaque ligne, chaque colonne, et chaque bloc. Voici un exemple :

6	9	7	4	5	3	2	1	8
8	2	4	6	1	9	7	5	3
3	5	1	2	8	7	6	9	4
7	3	5	8	6	1	9	4	2
9	4	8	7	3	2	1	6	5
1	6	2	5	9	4	3	8	7
5	1	9	3	7	8	4	2	6
4	7	6	9	2	5	8	3	1
2	8	3	1	4	6	5	7	9

Le but de cette feuille d'exercices est de décrire les grilles de Sudoku à « symétrie » près. La définition mathématique d'une grille de Sudoku s'obtient en mettant en valeur les différents éléments constitutifs du Sudoku, tels qu'introduits ci-dessus : les *cases*, *blocs*, *lignes*, *colonnes* et *chiffres*.

Définitions. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{1,\dots,9\}\times\{1,\dots,9\}$.

- une *case* est un élément de $\mathcal{C}$ i.e. un couple (i,j),
- une *ligne* est une partie de la forme $L_i := \{i\}\times\{1,\dots,9\}$,
- une *colonne* est une partie de la forme $C_j := \{1,\dots,9\}\times\{j\}$,
- une *bande* est une réunion de trois lignes, de la forme $B_i := L_{3i-2}\cup L_{3i-1}\cup L_{3i}$,
- une *pile* est une réunion de trois colonnes, de la forme $P_j := C_{3j-2}\cup C_{3j-1}\cup C_{3j}$,
- un *bloc* est l'intersection d'une bande et d'une pile.
- une *grille de Sudoku* est une application $f:\mathcal{C}\to\{1,\dots,9\}$ dont la restriction aux lignes, aux colonnes et aux blocs est injective. On appelle $f(i,j)$ le *chiffre* de la case (i,j).

On peut permuter les cases (en respectant la structure ligne-colonne-bloc) ou les chiffres d'une grille de Sudoku. Ceci revient à agir à la source ou au but d'une application $f:\mathcal{C}\to\{1,\dots,9\}$. On arrive ainsi à la définition suivante.

Définition. Soit X l'ensemble des grilles de Sudoku. Une *transformation de Sudoku* (ou simplement *transformation*) est une paire de bijections $(g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \sigma : \{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 9\})$ telle que si x est une ligne ou une colonne, alors $g(x)$ est une ligne ou une colonne. Une telle transformation donne lieu à une bijection $(g, \sigma) : X \to X$, $f \mapsto \sigma \circ f \circ g^{-1}$.

On notera G le groupe des transformations de Sudoku, agissant sur X par la formule précédente. Le thème de cette feuille est donc de décrire l'ensemble des orbites de X sous G, ou encore, l'ensemble X/G.

(1) Donnez une liste aussi longue que possible de transformations de Sudoku.

(2) Soit g une transformation de Sudoku. Montrez que s'il existe une ligne qui est envoyée par g sur une ligne, alors toutes les lignes le sont. Montrez que si g vaut l'identité sur $L_1 \cup C_1$, alors c'est l'identité.

(3) Déduisez de la question (2) que le groupe G est engendré par les transformations suivantes :

- les renumérotations de chiffres i.e. les éléments de la forme $(1, \sigma)$,
- la réflexion par rapport à la diagonale (ensemble des cases (i, i)),
- les échanges de deux bandes,
- les échanges de deux lignes dans la même bande,
- les échanges de deux piles,
- les échanges de deux colonnes dans la même pile.

On s'intéresse maintenant au nombre d'orbites, i.e. au nombre de grilles à transformation près. Pour simplifier le problème, on regarde désormais les grilles composées de 4 blocs de taille 2×2, dont on remplit les cases avec les chiffres de 1 à 4 de telle sorte qu'un chiffre n'apparaisse qu'une fois dans chaque ligne, chaque colonne, et chaque bloc. Par exemple :

3	2	4	1
1	4	2	3
4	3	1	2
2	1	3	4

On attribue des symboles aux transformations suivantes :

	renumérotation des symboles 1,2,3,4
$\rightrightarrows$	échange des deux bandes
$\rightrightarrows 1$	échange des lignes dans la bande 1
$\rightrightarrows 2$	échange des lignes dans la bande 2
$\downdownarrows$	échange des piles
$\downdownarrows 1$	échange des colonnes dans la pile 1
$\downdownarrows 2$	échange des colonnes dans la pile 2
$\diagdown$	réflexion autour de la diagonale NO-SE
$\diagup$	réflexion autour de la diagonale NE-SO
$—$	réflexion autour de l'axe de symétrie horizontal
$\mid$	réflexion autour de l'axe de symétrie vertical
$\circlearrowleft$	rotation de 1/4 tour dans le sens indiqué

(4) On note $\langle - \rangle$ le sous-groupe engendré. Montrez que :

- $\rightrightarrows 1 \in \langle \rightrightarrows, \rightrightarrows 2 \rangle$,
- $\downdownarrows 1 \in \langle \downdownarrows, \downdownarrows 2 \rangle$.

Déduisez-en que G est engendré par les renumérotations et l'ensemble $\{\rightrightarrows, \rightrightarrows 2, \downdownarrows, \downdownarrows 2, \diagdown\}$.

(5) (Cette question n'est pas indispensable pour la suite.) Montrez que :

- $— \in \langle \rightrightarrows, \rightrightarrows 2 \rangle$,
- $\mid \; \in \langle \downdownarrows, \downdownarrows 2 \rangle$,
- $\diagup \in \langle —, \mid, \diagdown \rangle$,
- $\circlearrowleft \in \langle \rightrightarrows, \diagup, \downdownarrows 1, \downdownarrows 2 \rangle$.

(6) Soit H le sous-groupe de G engendré par les renumérotations et l'ensemble $\{\rightrightarrows 2, \downdownarrows 2, \diagdown\}$. On part d'une grille de Sudoku quelconque. Montrez qu'en utilisant des transformations de H, on peut successivement ramener cette grille aux grilles suivantes :

①

1	2	$*$	$*$
3	4	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$

②

1	2	3	4
3	4	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$

③

1	2	3	4
3	4	$*$	$*$
2	$*$	$*$	$*$
4	$*$	$*$	$*$

④

1	2	3	4
3	4	1	$*$
2	$*$	$*$	$*$
4	$*$	$*$	$*$

(7) Complétez autant que possible cette dernière grille et montrez qu'on arrive finalement à deux grilles possibles. Déduisez-en que H agit librement sur X et que X/H contient deux éléments.

(8) Dans un cadre général, considérons un groupe G agissant sur un ensemble X. Pour tout sous-groupe H de G, définissez une relation d'équivalence naturelle $\mathcal{R}$ sur X/H, induite par l'action de G, telle que la surjection $X/H \to X/G$ se factorise en une bijection $(X/H)/\mathcal{R} \simeq X/G$.

(9) En utilisant la question précédente dans le contexte du Sudoku, montrez que la relation d'équivalence induite par G sur X/H est triviale (c'est-à-dire que $x\mathcal{R}y$ ssi $x = y$). Déduisez-en que $X/H \simeq X/G$ et qu'il y a deux grilles de Sudoku distinctes à transformation près.