

## Lundi 15 septembre 2008

# L'exponentielle complexe

D'un point de vue historique, les concepts familiers d'angle, cosinus, sinus, exponentielle, et même le nombre  $\pi$  qui est au départ de cette aventure, sont apparus de manière plus chaotique que ce que l'enseignement de collège et lycée peut laisser croire. Dans ce petit texte, nous expliquons comment on peut présenter ces concepts de manière tout à fait différente, en tirant profit du développement de l'analyse et de ses fondations rigoureuses au 18<sup>ème</sup>, 19<sup>ème</sup> et 20<sup>ème</sup> siècles. Cette présentation met l'exponentielle sur le devant de la scène. Le cosinus, le sinus et le nombre  $\pi$  ne sont définis qu'ensuite, à partir de celle-ci.

Pour que ce texte soit lisible avec des connaissances légères, un grand soin est mis pour éviter tant que possible la théorie des fonctions holomorphes ou le calcul différentiel avancé (théorème des fonctions implicites notamment). Cependant, un peu de topologie est inévitable pour démontrer que l'exponentielle induit un paramétrage périodique du cercle  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1. Ceci nécessite quelques arguments plus sophistiqués (abordables tout de même au niveau L3) qui ont été réunis dans la dernière partie, qu'il est possible de ne pas lire.

## 1 Définition et principales propriétés

Dans le corps des complexes  $\mathbb{C}$ , une partie est dite *ouverte* si elle est réunion de disques ouverts  $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ . La donnée de ces ouverts définit une topologie sur  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 1.1** *La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} z^n/n!$  est normalement convergente sur tout compact  $K \subset \mathbb{C}$ . Sa somme est notée  $\exp(z)$  ou  $e^z$ .*

**Démonstration :** Soit  $M$  tel que  $|z| \leq M$  pour tout  $z \in K$ . On a alors

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{z \in K} \frac{|z|^n}{n!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}.$$

On applique à  $u_n = M^n/n!$  le critère de d'Alembert pour les séries. Ici  $u_{n+1}/u_n = M/(n+1)$  tend vers 0, donc on a convergence de la série  $\sum M^n/n!$  et il en découle que la série de fonctions converge normalement sur  $K$ .  $\square$

La propriété fondamentale de l'exponentielle est la suivante :

**Théorème 1.2** *Pour tous nombres complexes  $s, t$  on a  $e^s e^t = e^{s+t}$ . En particulier l'exponentielle définit un morphisme de groupes  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ .*

**Démonstration :** Soit  $K$  un compact qui contient  $s$  et  $t$ . Pour  $s$  fixé, la série qui définit  $e^s$  est absolument convergente, et idem pour  $e^t$ . D'après le théorème sur le produit de Cauchy on a

$$e^s e^t = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n}{n!} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{s^p t^q}{p! q!}.$$

Par ailleurs, en utilisant la formule du binôme,

$$\sum_{p+q=n} \frac{s^p t^q}{p! q!} = \sum_{p=0}^n \frac{s^p}{p!} \frac{t^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} s^p t^{n-p} = \frac{1}{n!} (s+t)^n,$$

donc finalement  $e^s e^t = \sum_{n \geq 0} (s+t)^n/n! = e^{s+t}$ .  $\square$

Voici une propriété élémentaire de l'exponentielle, utile pour la suite :

**Lemme 1.3** *Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ .*

**Démonstration :** La conjugaison complexe est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire, donc continue. Il en découle que le conjugué de  $\exp(z)$ , c'est-à-dire le conjugué de la limite des sommes partielles  $\sum_{n \leq N} z^n/n!$ ,

est égal à la limite des sommes partielles  $\sum_{n \leq N} \bar{z}^n/n!$ , c'est-à-dire à  $\exp(\bar{z})$ .  $\square$

Le théorème 1.2 exprime une propriété algébrique, mais nous allons voir que celle-ci a un pendant analytique tout aussi fondamental. Commençons pas le cas réel :

**Proposition 1.4** *La restriction de l'exponentielle à  $\mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$ , de dérivée  $(\exp_{\mathbb{R}})' = \exp_{\mathbb{R}}$ , et définit un isomorphisme de groupes  $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{+*}$ .*

**Démonstration :** Par définition  $\exp_{\mathbb{R}}$  est développable en série entière au voisinage de tout point, donc elle est de classe  $C^\infty$ . D'après le théorème 1.2, pour  $x, h$  réels on a

$$e^{x+h} = e^x e^h = e^x (1 + h + h^2/2 + \dots) = e^x + e^x h + h^2 \varphi(x, h)$$

pour une certaine fonction  $\varphi$  dépendant de manière  $C^\infty$  de  $h$ . Alors le calcul de la dérivée par taux d'accroissement fournit immédiatement que la valeur de la dérivée en  $x$  est  $e^x$ .

On considère ensuite la fonction  $\ln : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ . Cette fonction est dérivable et par définition  $\ln'(x) = 1/x$  pour tout  $x > 0$ . Soient les fonctions dérivables

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{+*} &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} & , & & f(x) &= x \exp(-\ln(x)) , \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & , & & g(x) &= \ln(\exp(x)) - x . \end{aligned}$$

Deux calculs de dérivée montrent que  $f'(x) = g'(x) = 0$  pour tout  $x$ . Donc ces fonctions sont constantes,  $f(x) = f(1) = 1$  et  $g(x) = g(0) = 0$ . Ceci signifie que  $\exp_{\mathbb{R}}$  et  $\ln$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre, donc  $\exp_{\mathbb{R}}$  est un isomorphisme de groupes d'inverse  $\ln$ .  $\square$

Avant de passer au cas complexe, prenons le temps d'un commentaire. Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de deux variables réelles, à valeurs dans un espace à deux dimensions réelles. Pour se ramener à la situation plus simple des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , il est naturel d'essayer de composer  $f$  avec des applications  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à la source et  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  au but.

Il existe deux applications  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  privilégiées : la partie réelle et la partie imaginaire, et nous les utilisons toujours sans même y penser. D'ailleurs l'étude de  $f$  est équivalente à l'étude simultanée de  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$ . Quant à la composition à la source par des applications  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , elle correspond à tracer des chemins dans  $\mathbb{C}$  et regarder le comportement de  $f$  le long de ces chemins. On fera grand usage de cette technique de chemins dans la suite, et dès maintenant pour donner la caractérisation différentielle de l'exponentielle :

**Théorème 1.5** *L'exponentielle est l'unique fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfaisant la propriété suivante : pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $g(t) = f(tz)$  est dérivable et vérifie*

$$\begin{cases} g'(t) = zg(t) \\ g(0) = 1 . \end{cases}$$

**Démonstration :** D'après le théorème 1.2, pour  $t, h$  réels on a

$$e^{(t+h)z} = e^{tz} e^{hz} = e^{tz} (1 + hz + h^2 z^2/2 + \dots) = e^{tz} + ze^{tz} h + h^2 \varphi(t, h, z)$$

pour une certaine fonction  $\varphi$  dépendant de manière  $C^\infty$  de  $h$ . Utilisant cela, on vérifie que  $f = \exp$  satisfait la propriété annoncée puisque le calcul de la dérivée par taux d'accroissement fournit  $g'(t) = ze^{tz} = zg(t)$  et de plus  $g(0) = 1$ .

Réciproquement soit  $f$  une fonction vérifiant cette propriété. Posons  $h(t) = e^{-tz} g(t)$ , il vient immédiatement  $h'(t) = -ze^{-tz} g(t) + e^{-tz} g'(t) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc  $h$  est constante :  $h(t) = a$ , et  $g(t) = ae^{tz}$ . Comme  $g(0) = 1$ , on trouve  $g(t) = e^{tz}$  puis  $f(z) = g(1) = e^z$ .  $\square$

**Théorème 1.6** *L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est surjective.*

Une raison pour cela est que l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{C}^*$  est connexe. À titre de comparaison, il est intéressant de constater que  $\mathbb{R}^*$  n'est pas connexe, et que l'exponentielle des nombres réels a pour image  $\mathbb{R}^{+*}$ , qui est la composante connexe de l'élément neutre.

**Démonstration :** Non seulement  $\mathbb{C}^*$  est connexe, mais il est même connexe par arcs. Étant donné  $z \in \mathbb{C}^*$ , on peut l'atteindre depuis l'élément neutre 1 par un chemin tracé dans  $\mathbb{C}^*$  :

$$\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ continu et tel que } \zeta(0) = 1 \text{ et } \zeta(1) = z.$$

L'idée intuitive est d'utiliser ce chemin pour construire un « petit bout de logarithme », c'est-à-dire une fonction  $\ell : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  on a  $\exp(\ell(t)) = \zeta(t)$ . Pour guider ce choix, on s'inspire de l'observation que formellement, si  $\ell(t) = \ln(\zeta(t))$ , alors  $\ell'(t) = \zeta'(t)/\zeta(t)$ . Rigoureusement maintenant, définissons  $\ell : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\ell(t) = \int_0^t \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Comme  $\zeta$  est continue et ne s'annule pas, alors  $\zeta'/\zeta$  est continue donc  $\ell$  est dérivable de dérivée  $\ell'(t) = \zeta'(t)/\zeta(t)$ . Posons  $g(t) = \zeta(t) \exp(-\ell(t))$ . Utilisant le théorème 1.5, on trouve

$$g'(t) = \zeta'(t) \exp(-\ell(t)) - \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} \zeta(t) \exp(-\ell(t)) = 0$$

donc  $g$  est constante :  $g(t) = g(0) = 1$ . Il s'ensuit que  $\exp(\ell(t)) = \zeta(t)$  pour tout  $t$ . En particulier  $\exp(\ell(1)) = \zeta(1) = z$ , donc l'exponentielle est surjective.  $\square$

J'insiste sur le fait qu'il n'existe pas de fonction réciproque globale pour l'exponentielle. On ne sait construire que des « petits bouts de logarithme » sur des ouverts  $V \subset \mathbb{C}^*$ , mais ceci ne donne pas lieu à une construction globale car ces petits bouts ne coïncident pas sur les différents ouverts.

Le résultat le plus difficile concernant l'exponentielle est le suivant :

**Théorème 1.7** *L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est ouverte, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert est un ouvert.*

Pour ne pas alourdir l'exposition, nous l'admettrons pour l'instant. Nous proposons au lecteur de lire la partie 3 pour la démonstration.

## 2 L'exponentielle et le cercle

Dans cette partie, on utilise l'exponentielle pour décrire le groupe multiplicatif  $\mathbb{U}$  des nombres complexes de module 1. Ce groupe est muni de la topologie induite de celle de  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire que ses ouverts sont les  $U \cap \mathbb{U}$  avec  $U$  ouvert dans  $\mathbb{C}$ . On note que si  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = 1$$

d'après le lemme 1.3. Ainsi, on peut définir un morphisme de groupes

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}, \quad \varphi(x) = e^{ix}.$$

On va justifier que, tout comme l'exponentielle,  $\varphi$  est surjectif et ouvert.

**Lemme 2.1** *Le morphisme  $\varphi$  est surjectif.*

**Démonstration :** Soit  $z \in \mathbb{U}$ . D'après le théorème 1.6 il existe un complexe  $x + iy$  tel que  $e^{x+iy} = z$ . Comme  $e^{iy} \in \mathbb{U}$  on trouve  $e^x = ze^{-iy} \in \mathbb{U}$ . Comme par ailleurs  $e^x$  est un réel strictement positif, on trouve  $e^x = 1$  donc  $x = 0$  par la proposition 1.4. Donc  $z = e^{iy}$  est dans l'image de  $\varphi$ .  $\square$

**Lemme 2.2** *Le morphisme  $\varphi$  est ouvert.*

**Démonstration :** Les ouverts de  $\mathbb{R}$  sont les réunions d'intervalles ouverts  $]a, b[$  donc ce sont exactement les parties de la forme  $U \cap \mathbb{R}$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$ . Il s'agit de montrer que l'image de  $U \cap \mathbb{R}$  est ouverte dans  $\mathbb{U}$ . La partie  $iU := \{iz, z \in U\}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , donc par le théorème 1.7 il en va de même de  $V := \exp(iU)$ . Par conséquent  $\exp(iU) \cap \mathbb{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{U}$ , donc il suffit de démontrer que  $\varphi(U \cap \mathbb{R}) = \exp(iU) \cap \mathbb{U}$ . L'inclusion directe est claire. Pour la réciproque, soit  $z = e^{i(x+iy)} \in \mathbb{U}$  avec  $x + iy \in U$ . Alors  $e^{-y} = ze^{-ix} \in \mathbb{U}$ . Par le même argument que dans la preuve du lemme 2.1, on trouve  $y = 0$  donc  $z = \varphi(x) \in \varphi(U \cap \mathbb{R})$ .  $\square$

**Théorème 2.3** *Il existe un unique nombre réel strictement positif noté  $\pi$  tel que le noyau de  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$  est égal à  $2\pi\mathbb{Z}$ . Le morphisme  $\varphi$  induit un isomorphisme de groupes*

$$\bar{\varphi} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U} .$$

**Démonstration :** D'après le résultat classique sur les sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ , le noyau  $N := \ker(\varphi)$  est soit dense dans  $\mathbb{R}$ , soit de la forme  $a\mathbb{Z}$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ .

Supposons  $N$  dense dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $\varphi(x) = 1$  pour tout  $x \in N$  et comme  $\varphi$  est continu, il s'ensuit que  $\varphi$  est constant égal à 1. Ceci est impossible car  $\varphi$  est surjectif, donc  $N = a\mathbb{Z}$ .

Supposons  $a = 0$ . Alors  $N = 0$  donc  $\varphi$  est un isomorphisme de groupes. Par ailleurs  $\varphi$  est continu. De plus, son inverse  $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  doit l'être aussi puisque si  $U \subset \mathbb{R}$  est un ouvert alors  $\psi^{-1}(U) = \varphi(U)$  est ouvert étant donné que  $\varphi$  est ouvert par 2.2. Il s'ensuit que  $\varphi$  est un homéomorphisme. Ceci est impossible, puisque  $\mathbb{R}$  n'est pas compact alors que  $\mathbb{U}$  l'est.

Donc  $a > 0$ , et en posant  $\pi := a/2$  on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Si  $z$  est un nombre complexe non nul, son module  $\rho = |z|$  est non nul et il est clair que  $\rho^{-1}z$  est un nombre complexe de module 1. D'après la proposition ci-dessus, il existe un nombre réel  $\theta$  tel que  $\rho^{-1}z = e^{i\theta}$ . De plus, deux tels nombres réels  $\theta, \theta'$  diffèrent d'un multiple de  $2\pi$ , c'est-à-dire que la classe  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est uniquement déterminée.

**Définition 2.4** Pour tout nombre complexe  $z \neq 0$ , l'écriture  $z = \rho e^{i\theta}$  est appelée la *forme polaire* de  $z$  et l'élément  $\bar{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est appelé l'*argument* de  $z$  et noté  $\text{Arg}(z)$ .

**Corollaire 2.5** *On a un isomorphisme de groupes commutatifs*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ z &\mapsto (|z|, \text{Arg}(z)) . \end{aligned}$$

**Démonstration :** Il est clair que c'est un isomorphisme. Son inverse associe à  $(\rho, \bar{\theta})$  le complexe  $z = \rho e^{i\theta}$ , où  $\theta$  est un représentant quelconque de  $\bar{\theta}$ .  $\square$

Pour manipuler l'argument d'un nombre complexe, on en choisira systématiquement un représentant  $\theta \in \mathbb{R}$ . Une des difficultés de la notion d'argument est la confusion fréquente entre l'argument et ses représentants réels. Par exemple, dans l'écriture polaire on appelle souvent  $\theta$  l'argument alors que ce n'est que l'un de ses représentants. Cette confusion n'est évidemment pas souhaitable.

Nous continuons le déroulement des propriétés de l'exponentielle et des diverses quantités qui lui sont reliées.

**Théorème 2.6 (Euler)** *On a  $e^{i\pi} = -1$ .*

**Démonstration :** Par définition  $\pi$  est le plus petit réel strictement positif tel que  $e^{2i\pi} = 1$ . Posons  $z = e^{i\pi}$ , on a donc  $z \neq 1$  et  $z^2 = e^{2i\pi} = 1$ . Dans le corps  $\mathbb{C}$  l'équation  $X^2 = 1$  a pour seules racines 1 et  $-1$ . Donc  $z = -1$ .  $\square$

On peut ensuite développer la trigonométrie sur cette lancée. On introduit les fonctions trigonométriques  $\cos, \sin, \dots$  et leurs propriétés principales se déduisent de celles de l'exponentielle. Nous n'indiquons que le début de cette belle histoire.

**Définitions 2.7** Pour tout nombre complexe  $z$ , on définit :

- (1) le *cosinus*  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ,
- (2) le *sinus*  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ,
- (3) le *cosinus hyperbolique*  $\text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$ ,
- (4) le *sinus hyperbolique*  $\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz)$ .

Nous laissons au lecteur le soin d'ajouter à cette liste la définition des tangente, cotangente, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique.

**Proposition 2.8** *On a les propriétés :*

- (1) *si  $z$  est réel, alors  $\cos(z), \sin(z), \text{ch}(z)$  et  $\text{sh}(z)$  sont réels.*
- (2)  $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$  et  $e^z = \text{ch}(z) + \text{sh}(z)$ .

$$(3) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

$$(4) \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1.$$

**Démonstration :** La vérification de ces propriétés est facile et laissée au lecteur.  $\square$

Une autre observation parfois utile est que pour  $x$  réel,  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  sont la partie réelle et la partie imaginaire de  $e^{ix}$ , et  $\operatorname{ch}(x)$  et  $\operatorname{sh}(x)$  sont la partie paire et la partie impaire de  $e^x$ .

**Proposition 2.9** *Pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$ , on a :*

$$(1) \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$(2) \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

**Démonstration :** Ces formules découlent de la multiplicativité de l'exponentielle, et nous laissons la vérification au lecteur.  $\square$

Pour faire le lien avec la présentation habituelle du nombre  $\pi$ , nous devons le relier au périmètre du cercle. Ce lien résulte de la *définition de la longueur* qui est rappelée dans la preuve du résultat que voici :

**Proposition 2.10** *Le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre est égal à  $\pi$ .*

**Démonstration :** Rappelons que si  $c : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un arc de classe  $C^1$  qui est injectif sauf en un nombre fini de points, alors cet arc possède une *longueur* définie par

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Revenant à notre cercle  $\mathcal{C}$ , on peut le supposer centré en l'origine 0 et c'est alors l'ensemble des points de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant  $x^2 + y^2 = R^2$  où  $R > 0$  est le rayon. À un tel point  $(x, y)$  correspond le nombre complexe  $z = x + iy$  qui est alors de module  $R$ . D'après le théorème 2.3 et la définition de  $\pi$ , le paramétrage

$$\begin{aligned} c : [0; 2\pi] &\rightarrow \mathcal{C} \\ t &\mapsto Re^{it} \end{aligned}$$

est injectif sauf en 0 et  $2\pi$ . On a  $c'(t) = Rie^{it}$  qui est de module  $R$  donc

$$L(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \|Rie^{it}\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

C'est bien le produit du diamètre par  $\pi$ .  $\square$

### 3 L'exponentielle est ouverte

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème mentionné plus haut :

**Théorème 1.7** *L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est ouverte.*

Pour démontrer que l'exponentielle est surjective (théorème 1.6), on a utilisé un chemin tracé dans  $\mathbb{C}^*$  et joignant 1 à  $z$ . Il est tout à fait remarquable que le raisonnement fonctionnait pour n'importe quel chemin  $\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  joignant 1 à  $z$ .

A priori, un changement de chemin  $\zeta$  change l'antécédent  $\ell(1)$ , et une meilleure notation serait donc  $\ell(1, \zeta)$ . Le fait que l'exponentielle est ouverte va résulter de la possibilité de choisir le chemin  $\zeta$  de sorte que l'antécédent  $\ell(1, \zeta)$  varie continuellement avec  $z$ , au moins localement au voisinage de 1. Tout simplement, on joint 1 à  $z$  par la ligne droite :

$$\zeta(t) = 1 + t(z - 1).$$

La contrainte que le chemin soit tracé tout entier dans  $\mathbb{C}^*$  nous force à éliminer les  $z$  qui sont sur le demi-axe réel négatif. C'est une illustration du fait qu'on ne sait construire que des « petits bouts de logarithme » sur des ouverts de  $\mathbb{C}^*$ . Cependant, il se trouve qu'il sera largement suffisant pour nous de construire  $\ell(1, \zeta)$  sur le disque ouvert centré en 1 et de rayon 1, noté  $D$ . On considère donc la fonction  $\ell : [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\ell(t, z) = \int_0^t \frac{z - 1}{1 + s(z - 1)} ds.$$

**Lemme 3.1** La fonction  $\lambda : D \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\lambda(z) = \ell(1, z)$  est continue.

**Démonstration :** On peut invoquer le théorème de continuité dans les intégrales à paramètre. Une autre possibilité est de passer par les séries entières, comme suit. Pour tout  $(s, z) \in [0, 1] \times D$  on a  $|s(z - 1)| < 1$  donc on a le développement en série convergente

$$\frac{1}{1 + s(z - 1)} = \sum_{n \geq 0} (-s(z - 1))^n .$$

Vérifions que cette série de fonctions converge uniformément sur  $[0, 1]$ . D'abord notons que la somme de cette série est une fonction de  $s$  continue sur  $[0, 1]$ , donc son module est majoré par un certain  $M > 0$ . Le reste au rang  $N$  de la série est

$$R_N(s) = \sum_{n \geq N} (-s(z - 1))^n = \frac{(-s(z - 1))^N}{1 + s(z - 1)} ,$$

donc  $\sup_{s \in [0, 1]} |R_N(s)| \leq M |z - 1|^N$ . Puisque  $|z - 1| < 1$ , ce sup tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$ , d'où convergence uniforme. On sait qu'on peut alors intervertir la somme infinie et l'intégrale :

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= (z - 1) \int_0^1 \sum_{n \geq 0} (-s(z - 1))^n ds = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 (-1)^n (z - 1)^{n+1} s^n ds \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z - 1)^{n+1}}{n + 1} . \end{aligned}$$

Ainsi  $\lambda$  est développable en série entière sur  $D$ , donc continue sur  $D$ .  $\square$

**Remarque 3.2** Dans le développement en série entière de  $\lambda$ , on reconnaît le développement habituel de  $\ln(z)$  en  $z = 1$ , ce qui n'est pas un hasard...

Dans la dernière partie de la preuve, nous utiliserons constamment les morphismes de translation, qui sont des homéomorphismes :

- pour  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la translation additive de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $z \mapsto z_0 + z$ . L'image d'une partie  $A \subset \mathbb{C}$  par cette translation est notée  $z_0 + A$ .

- pour  $z_0 \in \mathbb{C}^*$ , la translation multiplicative de  $\mathbb{C}^*$  dans  $\mathbb{C}^*$  définie par  $z \mapsto z_0 z$ . L'image d'une partie  $A \subset \mathbb{C}^*$  par cette translation est notée  $z_0 A$ .

Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert, il s'agit de démontrer que  $V = \exp(U)$  est un ouvert. Soit  $y \in V$ , donc  $y = \exp(x)$ ,  $x \in U$ , et vérifions que la partie

$$\Omega = y\lambda^{-1}(-x + U)$$

est un voisinage ouvert de  $y$  dans  $V$ . Dans cette notation,  $-x + U$  est le translaté additif de  $U$ , qui contient 0. Puis  $\lambda^{-1}(-x + U)$  est sa préimage par  $\lambda$ , qui contient donc 1. Enfin  $\Omega$  est le translaté multiplicatif par  $y$ , il contient donc  $y$ .

Comme  $-x + U$  est ouvert et  $\lambda$  continue d'après le lemme 3.1, alors  $\lambda^{-1}(-x + U)$  est ouvert et donc  $\Omega$  aussi.

Enfin vérifions que  $\Omega \subset V$ . Par définition de  $\Omega$ , pour tout  $z \in \Omega$  il existe  $v \in D$  tel que  $z = yv$  et  $\lambda(v) + x \in U$ . Or  $\exp(\lambda(v)) = v$  par la preuve du théorème 1.6, et  $\exp(x) = y$ . Partant de  $\lambda(v) + x \in U$  et prenant l'exponentielle, on trouve

$$z = vy = \exp(\lambda(v)) \exp(x) \in \exp(U) = V ,$$

ce que l'on voulait.  $\square$