Séminaire « Éthique et mathématiques »
Institut de recherche mathématique de Rennes
29 novembre 2024

Des μαθηματα des Anciens aux mathématiques des Modernes

Olivier REY
Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques
CNRS / Université Paris 1

J'ai mentionné, dans les quelques lignes qui annonçaient cette séance, une phrase de René Char que Michel Foucault a fait figurer sur la quatrième de couverture des deux derniers ouvrages parus de son vivant, *L'Usage des plaisirs* et *Le Souci de soi* (1984). Une phrase qui dit : « L'histoire des hommes est la longue succession des synonymes d'un même vocable. Y contredire est un devoir[1]. » Foucault interprète cette affirmation comme un condensé de sa propre démarche. On sait la position centrale occupée dans la pensée de Foucault par la notion d'*épistémè*, qui désigne une façon de penser, de parler, de se représenter le monde propre à une culture et à une époque et qui permet, selon lui, « de séparer, non pas le vrai du faux, mais l'inqualifiable scientifiquement du qualifiable[2] ». Foucault distingue trois *épistémès* qui se sont succédées en Occident au cours des derniers siècles : l'*épistémè* de la Renaissance, l'*épistémè* classique, l'*épistémè* moderne. Et la phrase de René Char lui sert à mettre en garde contre les fausses synonymies qui, lorsqu'on passe d'une *épistémè* à l'autre, peuvent dissimuler des écarts, voire des béances de sens.

Les épistémès de Foucault ne sont pas les paradigmes de Thomas Kuhn, mais il existe entre les deux des analogies[3]. Kuhn décrit les révolutions scientifiques comme des changements de paradigmes qui rendent, une fois effectués, impossible l'accès à un état antérieur de la science. Les anciens paradigmes en effet, à l'aide desquels on devrait penser le monde pour accéder à cet état antérieur, sont nécessairement interprétés à la lumière des nouveaux. Pareille affirmation est contestable au sein de la science moderne, où il ne semble pas, par exemple, que les révolutions relativiste et quantique aient interdit de penser dans un cadre newtonien. Il n'y

[1] *L'Âge cassant*, 1965.

[2] Entretien de 1977 (avec D. Colas, A. Grosrichard, G. Le Gaufey, J. Livi, G. Miller, J. Miller, J.-A. Miller, C. Millot, G. Wajeman), publié dans *Ornicar ?, Bulletin Périodique du champ freudien*, n° 10, juillet 1977, p. 62-93 ; repris dans *Dits et Ecrits III*, Paris, Gallimard, 1994, texte n° 206.

[3] Sur ce qui rapproche et ce qui séparer les « épistémès » selon Foucault des « paradigmes » selon Kuhn, voir l'article de Paulo Pirozelli, « The Grounds of Knowledge: A Comparison Between Kuhn's Paradigms and Foucault's Epistemes », *Kriterion: Revista de Filosofia*, vol. 62, n° 148, 2021. https://www.scielo.br/j/kr/a/yVxNHQGSpKWVj9rgBRn58Rs/?lang=en

aurait, finalement, qu'une seule révolution pour laquelle la thèse de Kuhn s'appliquerait vraiment : la super-révolution scientifique qui a consacré le passage de la science aristotélicienne à la science moderne[4].

Aussi bien est-ce dans cette perspective que je voudrais aujourd'hui me placer. Nous savons que nombre de sciences modernes portent des noms grecs, qu'il s'agisse de noms nouveaux forgés à partir de racines grecques, comme par exemple la biologie, ou qu'il s'agisse de noms de disciplines qui existaient déjà en Grèce ancienne, comme les mathématiques et la physique. L'invariance des noms a pour avantage de rappeler la lointaine origine de sciences volontiers oublieuses de leur passé, et l'inconvénient de dissimuler les différences, voire les abîmes qui peuvent séparer ce que désigne un même vocable selon les époques. Il me semble que c'est une tâche pour la pensée que de mesurer ces différences et ces abîmes, afin de ne pas user des mots à tort et à travers, et de savoir tenir compte du sens qu'ils revêtent selon le contexte. D'une part ces métamorphoses historiques nous font mesurer le chemin réellement parcouru, d'autre part elles nous permettent de saisir ce qui éventuellement, à travers elles, se dégage comme invariant.

Je vais ici parler des mathématiques, en me permettant néanmoins, au préalable, quelques mots rapides sur la physique. Dans la phrase qui ouvre le livre II de sa *Physique*, Aristote définit ainsi les objets de la *phusis*, qu'on traduit par nature :

> Parmi les étants, les uns sont par nature (*phusei*), les autres par d'autres causes. Sont par nature les animaux et leurs parties, les plantes et les corps simples comme la terre, le feu, l'air et l'eau ; ce sont ceux-là et ceux de cette sorte que nous disons être par nature.
>
> ARISTOTE, *Physique*, II, 1, 192b.

Un esprit moderne ne peut qu'être frappé de constater que, pour Aristote, les objets par excellence de la physique sont les êtres vivants, animaux et plantes. Un peu de réflexion suffit à nous faire comprendre pourquoi il en est ainsi. « Physique » est un mot dérivé du verbe *phuo*, infinitif *phuein*, qui signifiait, transitivement, « faire naître », « faire croître », et, intransitivement, « naître », « croître », « pousser ». La traduction de *phusis* par nature est justifiée car en latin, *natura* dérive du verbe *nascor*, « naître » (« nature » et « nativité » ont la même racine). Les *physica*, c'étaient les choses dans la mesure où celles-ci se produisent d'elles-mêmes (par opposition, en particulier, à celles qui sont fabriquées, les *poioumena* – du verbe *poieo*, « fabriquer », « exécuter », « confectionner », « produire »…). De ce fait, les objets par excellence de la physique sont, comme l'écrit Aristote, les êtres vivants.

[4] Voir Thomas S. Kuhn, *La Structure des révolutions scientifiques* [1962-1970], trad. Laure Meyer, Paris, Flammarion, « Champs », 1983, et sa critique par Steven Weinberg, « The Revolution That Didn't Happen », *The New York Review of Books*, 8 octobre 1998, p. 48-52 (trad. fr. : « Une vision corrosive du progrès scientifique », *La Recherche*, n° 318, mars 1999, p. 72-80).

Qu'en est-il pour la science moderne ? On connaît l'affirmation de Galilée, selon laquelle le livre de la nature est écrit en langue mathématique. Dès lors, la science inaugurée par Galilée consiste à dégager la mathématicité dont l'univers est réputé tissé de part en part. La physique ancienne était déterminée par son objet, la *phusis*. La physique moderne est en premier lieu déterminée par ce qu'elle doit obtenir, la mathématicité, et par les méthodes à suivre pour y parvenir. La physique désigne, à l'époque moderne, cette part de la science de la nature qui est mathématisée. Dans l'idéal galiléen, tout devrait se laisser mathématiser. Dans la pratique, l'incapacité à tout mathématiser justifie l'existence, à côté de la physique, d'autres sciences de la nature, comme la chimie et la biologie. (Biologie qui, du fait de l'horizon mathématique de la science moderne, est du reste largement passée, à l'époque contemporaine, de l'histoire naturelle, encore dominée par les catégories aristotéliciennes, à la biochimie et à la génétique.)

Le temps imparti m'interdit de m'étendre davantage sur le sujet. J'en dirai davantage sur les mathématiques, même si mon propos demeurera nécessairement schématique.
La singularité de la Grèce ancienne, sur le terrain des mathématiques, tient moins à des résultats spectaculaires qu'au *statut* particulier que la Grèce ancienne a conféré aux mathématiques, en les lestant d'enjeux qui ont érigé les mathématiques en discipline digne de susciter l'attention et les efforts de grands esprits.
Pythagore est crédité par la tradition d'avoir été le premier à se donner le titre de philosophe, parce que se revendiquer sage lui semblait trop prétentieux. La tradition veut également qu'il ait été le premier à employer le terme *cosmos* pour désigner le tout.

> C'est Pythagore le premier qui a donné le nom de cosmos à l'enveloppe du tout, en raison de son ordonnancement.
>
> AÉTIUS, *Opinions des philosophes*, II, 1, 1.

Le mot « cosmos » était déjà en usage. Chez Homère, le vocable apparaît le plus souvent dans l'expression *kata kosmon* qui signifiait « selon la coutume », « comme il sied », « comme il convient », « comme il est approprié ». Le mot servait à désigner un ordre, un bon ordre, également la beauté résultant d'une disposition harmonieuse (sens esthétique qui se perçoit encore dans le français moderne « cosmétique »). La philosophie s'en empare, à partir de Pythagore, pour désigner le tout.
Le choix du terme « cosmos », pour désigner l'ensemble des êtres et des choses, signifie que cet ensemble est d'emblée perçu comme un tout bien ordonné, bien partagé, où chaque élément occupe la place qui lui revient. Le *cosmos* est le contraire d'un *chaos*.
Si le tout est d'emblée perçu comme ordonné, et bien ordonné, une tâche essentielle de la philosophie va consister à pénétrer les principes de cet ordre. Ces principes, Pythagore et son école vont considérer qu'ils résident dans les nombres (ἀριθμοί) et leurs rapports (συμμετρίες, ἁρμονίες). Je ne vais pas m'étendre ici sur les fondements d'une telle idée, solidaire de la

découverte des liens entre harmonie musicale et rapports numériques. Je retiendrai surtout l'influence exercée par le pythagorisme sur la pensée platonicienne.

Non que je prétende résumer la pensée des mathématiques en Grèce ancienne à la doctrine platonicienne. Si je me concentre sur elle, c'est pour deux raisons essentielles :

— premièrement, s'il y a bien une pensée des mathématiques chez des épicuriens, ou chez des stoïciens, c'est le plus souvent soit pour réfuter des positions platoniciennes, soit pour en recueillir quelques éléments. De ce fait, pour ce qui concerne les mathématiques, la pensée platonicienne occupe bien une position centrale ;

— secondement, toujours en ce qui concerne les mathématiques, c'est la pensée platonicienne qui a de très loin eu la postérité la plus importante. On connaît la phrase de Whitehead, selon laquelle la tradition philosophique européenne consiste, pour l'essentiel, en une suite de notes de bas de page à Platon[5]. Pour exagérée que soit la formule, elle a sa part de vérité. Au demeurant, Whitehead ne veut nullement dire que Platon a dit l'essentiel de ce qu'il y avait à dire en philosophie, le reste n'ayant pas d'autre statut que de commentaires ou compléments. D'une part Platon n'est pas un point de départ, il est l'héritier d'une tradition qui le précède, d'autre part ses conceptions sont critiquables sur bien des points. Ce que veut dire Whitehead, c'est que Platon a marqué la philosophie de manière décisive, que la philosophie après lui ne peut faire l'économie d'une confrontation avec Platon, et que l'étude de Platon demeure une source perpétuelle d'inspiration pour la réflexion philosophique.

Parmi les éléments dont Platon hérite, figure en bonne place la tradition pythagoricienne. Dans ses écrits, « Platon ne cite le nom de Pythagore qu'une seule fois et ne mentionne les pythagoriciens qu'en un seul passage à propos des deux sciences sœurs, l'harmonie et l'astronomie[6]. » La doctrine platonicienne doit pourtant beaucoup au pythagorisme. Mais Platon va inclure l'héritage pythagoricien dans une nouvelle perspective qui va avoir une postérité immense.

Je rappelle ici sous forme schématique comment Platon présente sa doctrine dans la *République*.

[5] « La tradition philosophique européenne consiste en une suite de notes de bas de page à Platon, telle est la meilleure caractérisation générale que l'on puisse en donner. Je ne parle pas du système de pensée que les spécialistes ont prétendu dégager de ses écrits. Je fais allusion au trésor d'idées qui s'y trouvent. Ses dons personnels, son vaste champ d'expérience au sein d'une grande époque de la civilisation, le fait d'hériter d'une tradition intellectuelle qui n'avait pas encore été rigidifiée par une systématisation excessive, font de ses écrits une mine inépuisable pour la pensée » (*Process and Reality: an essay in cosmology* [1929], New York, Free Press, 1978, p. 39 ; trad. française : *Procès et réalité. Essai de cosmologie*, trad. Daniel Charles *et al.*, Paris, Gallimard, « Bibliothèque de philosophie », 1995).

[6] Jean-François Mattéi, *Pythagore et les pythagoriciens* [1983], Paris, PUF, coll. « Que sais-je ? », 2013, p. 17. *République*, X, 600b et VII, 530d.

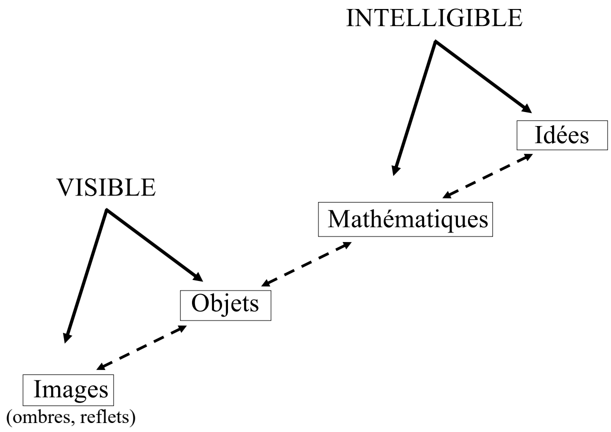


Schéma de la doctrine platonicienne
(*République*, Livre VI, 509d-511e)

Les mathématiques occupent une position intermédiaire entre les idées et le sensible. Elles appartiennent à l'intelligible, mais font lien avec le sensible. Leur pratique est un exercice bienvenu, voire indispensable, pour s'élever du sensible à l'intelligible – tandis que, en retour, les mathématiques doivent permettre d'établir un rapport juste avec le sensible. Dans le *Timée*, Platon esquissera la façon dont le monde sensible est constitué à partir de figures géométriques et de rapports numériques. Cependant Platon, parvenu aux idées, était moins soucieux d'établir une science de la nature, une physique, que de réorganiser la cité. On raconte qu'à l'entrée de l'Académie était inscrite la sentence : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre. » Étant donné que les premiers témoignages d'une telle inscription sont postérieurs de plus de dix siècles à Platon, il est douteux qu'elle ait vraiment existé. Mais peu importe – si le fait est inventé l'invention n'est pas absurde. La géométrie n'est pas une discipline parmi d'autres, elle est la discipline par laquelle l'âme apprend à se détacher du sensible pour se tourner vers l'intelligible, elle est la discipline par laquelle on se met en chemin vers les idées, elle est la discipline par laquelle on peut devenir philosophe.

L'originalité grecque quant aux mathématiques, je l'ai dit, tient à leur *statut* – ni élaborations à partir de questions pratiques, ni jeux de l'esprit. Dans la perspective pythagoricienne, elles donnent accès aux principes mêmes du cosmos, et, dans la perspective platonicienne, elles constituent un maillon essentiel du passage entre le monde sensible et les idées, elles sont cette partie de l'intelligible qui permet la communication entre le sensible et l'intelligible.

Les plus grands mathématiciens grecs, à commencer par Euclide, semblent s'être souciés bien plus de mathématiques que de philosophie. Cela étant, sans doute de si brillants esprits ne se seraient-ils pas voués aux mathématiques sans les enjeux dont la philosophie avait lesté les mathématiques, sans le prestige qu'elle leur avait conféré.

La position de la science moderne, vis-à-vis de l'héritage platonicien, est ambigu. D'un côté elle est tributaire, dans son existence même, du platonisme, d'un autre côté elle est un reniement du platonisme. Je m'explique.

Dans les universités médiévales, l'autorité dominante en matière de philosophie naturelle était Aristote – celui que Dante, dans sa *Divine Comédie*, qualifiait de « maître de ceux qui savent ». C'est au XVe siècle que se produisit en Italie, puis dans toute l'Europe, ce que l'on pourrait qualifier de *revival* platonicien. Ce *revival* fut favorisé par l'intérêt grandissant, dans l'Italie du Quattrocento, pour les œuvres des Anciens. Il fut encore favorisé par l'agonie et la fin de l'empire romain d'Orient, qui provoqua l'arrivée en Italie de lettrés grecs. À leur école, des Italiens apprirent le grec, et Marsile Ficin, à Florence, traduisit en latin l'intégralité des œuvres de Platon, qui devinrent dès lors accessible à tous les lettrés d'Europe. Le paysage intellectuel en fut profondément modifié. Une œuvre commanditée par le pape et réalisée par Raphaël au début du XVIe siècle témoigne de l'évolution. Dans *L'École d'Athènes*, Aristote n'est plus le maître de ceux qui savent, Platon est situé au même niveau que lui.

RAPHAËL, *L'École d'Athènes* (1509-1511)
Fresque, 440 × 770 cm, Palais du Vatican (Chambre de la Signature).

Court moment d'équilibre, car l'étoile de Platon ne cessait de monter. Le retentissement dans le domaine scientifique fut considérable. À l'université de Bologne, où il était allé étudier l'astronomie, le jeune Copernic fut initié au platonisme et au néo-platonisme, à l'idée pythagoricienne et platonicienne d'« harmonie des sphères », qu'il essaiera ensuite de rétablir avec son système. Plus tard, chez Galilée, Platon est une référence essentielle. C'est chez Platon que Galilée trouve l'idée des mathématiques comme lien entre le sensible et l'intelligible. Cependant, de cette idée, Galilée va tirer quelque chose de tout à fait nouveau. Chez Platon, nous l'avons dit, les mathématiques étaient d'abord prisées pour leur vertu *ascendante*, pour leur participation à l'*epistrophê*, à la conversion du regard qui se détourne du sensible pour se tourner vers l'intelligible. Mais dans l'Europe de la Renaissance, le ciel est occupé par Dieu. Dans la chambre de la Signature du Vatican, en face de *L'École d'Athènes*, se trouve une autre fresque, *Le Triomphe de l'Eucharistie* (nommée depuis Vasari *La Dispute du Saint-Sacrement*).

RAPHAËL, *La Dispute du Saint-Sacrement* (1509-1510)
Fresque, 500 × 770 cm, Palais du Vatican (Chambre de la Signature).

L'index de Platon pointait vers le ciel, l'Eucharistie est maintenant ce par quoi l'ici-bas entre en relation avec le divin. Dès lors, les mathématiques se trouvent dépouillées du rôle ascendant qu'elles pouvaient jouer dans la doctrine platonicienne. Si, malgré tout, elles font lien entre le sensible et l'intelligible, c'est dans le sens *descendant* qu'elles vont pouvoir être employées, de l'intelligible vers le sensible. C'est exactement le rôle que leur assigne Galilée : les mathématiques comme clé de déchiffrement du sensible. Galilée s'inspire de Platon, mais retourne l'inspiration platonicienne.

On trouve chez Descartes une même ambivalence à l'égard du platonisme. Pour lui aussi les mathématiques sont essentielles dans la connaissance du monde. Selon Galilée, la science de la nature doit être mathématique parce que le monde lui-même est écrit en langue mathématique. Pour Descartes, la science de la nature doit être mathématique, parce qu'une connaissance de la nature édifiée à partir des idées claires et distinctes prend d'elle-même une forme mathématique. Pareille absorption du sensible par l'intelligible peut être qualifiée de platonicienne. Mais on trouve aussi, dans la pensée de Descartes, des éléments tout à fait étrangers à l'inspiration platonicienne.

L'un des plus fondamentaux est le rôle décisif joué par l'écriture. On sait toutes les réserves émises par Platon, dans le *Phèdre*, à l'égard de l'écriture.

> Quand on en vint aux lettres de l'écriture : « Voilà, dit Theuth, la connaissance, ô Roi, qui procurera aux Égyptiens plus de science et plus de souvenirs ; car le défaut de mémoire et le manque de science ont trouvé leur remède ! » À quoi le roi répondit : « Ô Theuth, découvreur d'arts sans rival, autre est celui qui est capable de mettre au jour les procédés d'un art, autre celui qui l'est, d'apprécier quel en est le lot de dommage ou d'utilité pour les hommes appelés à s'en servir ! […] Cette invention, en dispensant les hommes d'exercer leur mémoire, produira l'oubli dans l'âme de ceux qui en auront acquis la connaissance ; en tant que, confiants dans l'écriture, ils chercheront au-dehors, grâce à des caractères étrangers, non point au-dedans et grâce à eux-mêmes, le moyen de se ressouvenir. »
>
> PLATON, *Phèdre*, 274e-275a.

Le contexte judéo-chrétien, à cet égard, a changé la donne, par la place centrale accordée aux Écritures. C'est à cause de cette place centrale des Écritures saintes que le monde sensible a pu se voir lui-même assimilé à un livre, écrit directement par Dieu. Écrit en langue mathématique, selon Galilée. L'écriture, d'objet de méfiance chez Platon, devient au contraire paradigmatique. Le problème, avec Galilée, est que la langue mathématique qu'il évoque ne sait guère encore se noter. Sur ce point, un pas décisif va être accompli à la fin du XVIe siècle et au début du XVIIe, depuis François Viète, dans son *Algèbre nouvelle*, jusqu'à Descartes, dans sa *Géométrie*.

Les mathématiques, chez Descartes, traduisent des *opérations* de notre esprit. Or, le dualisme entre l'esprit et la matière, la *res cogitans* et la *res extensa*, fait qu'il n'y a pas de répondant « naturel », dans la matière, aux opérations de notre esprit. Celles-ci peuvent donc revêtir, dans l'écriture, n'importe quelle forme que l'esprit peut décider. Dans une perspective cartésienne, ce n'est pas seulement que l'écriture mathématique *peut* devenir symbolique : c'est qu'elle ne peut être, pour être vraiment fidèle à ce qu'elle note, *que* symbolique. Une telle écriture symbolique, absolument nécessaire aux développements des mathématiques à l'époque moderne, les Grecs n'en disposaient pas. Et cette absence n'était pas seulement, de leur part, une lacune : elle résultait aussi d'un *refus*.

Autre point fondamental dans la conception cartésienne des mathématiques : le caractère opératoire. On sait que les Grecs n'admettaient en géométrie que ce qui se construisait à la règle et au compas. Pourquoi cette exclusivité accordée aux droites et aux cercles ? Parce que droites et cercles étaient considérés comme les seules lignes parfaites. Pourquoi étaient-elles parfaites ? Parce qu'elles s'imposent d'elles-mêmes à la vue, on les « reconnaît » immédiatement. Pour les

Grecs, le divin était lié à la vision. Les théorèmes mathématiques également, comme en témoigne ces mots construits sur la même racine.

θεός (*theos*): dieu, la divinité.

θεά (*thea*) : déesse.

θέα (*thea*) : action de regarder, de contempler, contemplation.
Également : objet de contemplation, spectacle, particulièrement spectacle de théâtre.

θέατρον (*theatron*) : théâtre, lieu où l'on assiste à un spectacle.

θεατός (*theatos*) : visible ; digne d'être contemplé.

θεωρέω (*theôreô*) : observer, examiner, contempler.

θεωρία (*theôria)* : action de voir, d'observer, d'examiner.
À partir de Platon : contemplation de l'esprit, méditation, étude ; spéculation théorique, théorie (par opposition à pratique).

θεώρημα (*theôrêma*) : ce qu'on peut contempler, d'où spectacle – mais aussi objet d'étude ou de méditation.

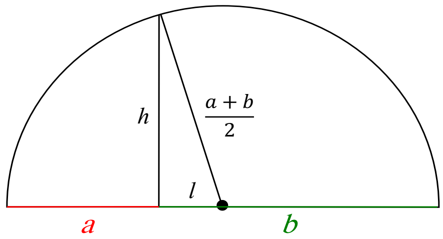
En fait, pourquoi « voit »-on immédiatement une ligne droite ou un cercle : non parce qu'ils seraient indépendants de toute construction, mais parce que leur procédé de construction est transparent à l'esprit.
Descartes comprend une chose : ce qui fait la mathématicité est la coïncidence de l'être avec un procédé de construction univoque.
On sait que les mathématiques grecques étaient confrontées à trois problèmes qu'elles ne savaient résoudre : la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, la duplication du cube. Pour la duplication du cube, les Grecs savaient que le problème était équivalent au problème de la double moyenne proportionnelle.

Moyennes proportionnelles

Étant donné deux nombres a et b ($b > a$) la moyenne proportionnelle de a et b est le nombre x qui vérifie :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Le nombre x est tel que $x^2 = ab$, c'est-à-dire $x = \sqrt{ab}$.



$\sqrt{ab}$ se construit à la règle et au compas :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = h^2 + l^2$$

et $l = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$, d'où

$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab$$

et finalement, $h = \sqrt{ab}$.

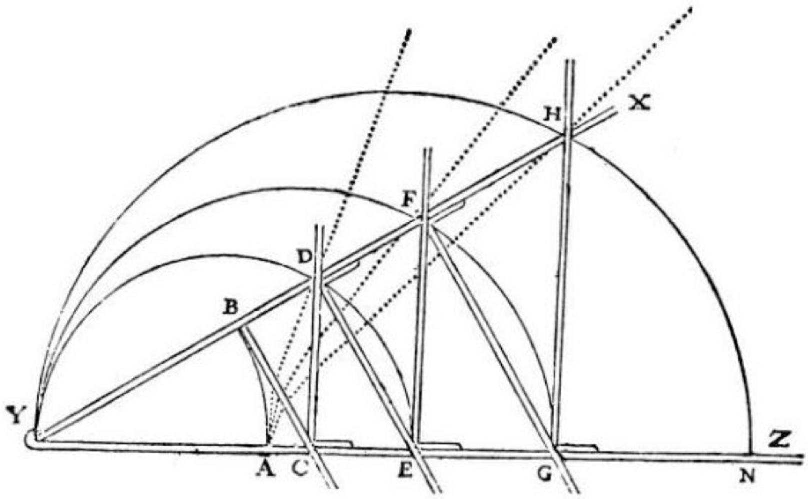
Le problème de la double moyenne proportionnelle consiste maintenant à trouver deux nombres x et y tels que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

On doit avoir $x^2 = ay$ et $y^2 = bx$, d'où $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$, et $x^3 = a^2b$.

En prenant $b = 2a$, on a $x^3 = 2a^3$, soit $x = \sqrt[3]{2}a$. Mais cette fois, x ne se construit pas à la règle et au compas.

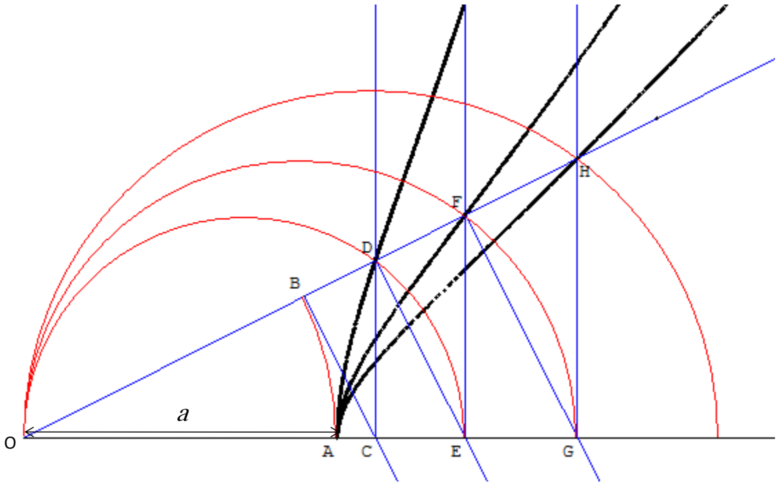
Les Grecs ne savaient résoudre ce problème. Descartes, lui, le sut, grâce à un compas d'un nouveau genre, mettant en jeu des équerres coulissant sur les branches du compas, et se poussant les unes les autres au fur et à mesure qu'on ouvre le compas.



Or, pendant qu'on ouvre ainsi l'angle XYZ, le point B décrit la ligne AB, qui est un cercle ; et les autres points D, F, H, où se font les intersections des autres règles, décrivent d'autres lignes courbes AD, AF, AH, dont les dernières sont par ordre plus composées que la première, et celle-ci plus que le cercle ; mais je ne vois pas ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive aussi nettement et aussi distinctement la description de cette première que du cercle, ou du moins que des sections coniques ; ni ce qui peut empêcher qu'on ne conçoive la seconde, et la troisième, et toutes les autres qu'on peut décrire, aussi bien que la première ; ni par conséquent qu'on ne les reçoive toutes en même façon pour servir aux spéculations de géométrie.

René Descartes, *La Géométrie,* livre II (AT VI, 391-392).

Voici une représentation des courbes engendrées par l'ouverture du compas.



Les triangles OBC, OCD, ODE sont semblables, puisque rectangles et ayant même angle en O. Il s'ensuit :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE}$$

C'est-à-dire que OC et OD résolvent le problème de la double moyenne proportionnelle entre OB ($=OA=a$) et OE. Il suffit donc d'ouvrir le « compas de Descartes » jusqu'à ce que $OE=2OB=2a$ pour obtenir :

$$OC = \sqrt[3]{2}\,a$$

On voit que cet instrument permet de construire les racines cubiques – ainsi que, avec *n* équerres, les racines *n*-ièmes. Pour Platon, l'instrument imaginé par Descartes aurait relevé de la mécanique. Pour Descartes, les courbes qu'il engendre sont tout aussi géométriques que celles engendrées par la règle et le compas, dans la mesure où, pour reprendre ses termes, « on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entre-suivent, et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent ; car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure[7] ».

Si le compas de Descartes permet de construire des racines *n*-ièmes, on sut aussi démontrer au XIXe siècle qu'en revanche, un nombre comme la racine cubique de 2 est impossible à construire à la règle et au compas. Pour qu'un nombre soit constructible à la règle et au compas il faut en effet que le degré de son polynôme minimal à coefficients rationnels soit une puissance de 2 (il suffit pour cela de considérer les équations qui dans le plan définissent les droites, de degré un, et les cercles, de degré deux : on en déduit facilement que les points définis par des intersections successives de droites et de cercles ont des coordonnées définies par des équations dont le degré minimal est une puissance de deux.)
Le fait d'avoir su démontrer que certains problèmes que les Grecs cherchaient à résoudre étaient insolubles, du moins avec les moyens qu'ils s'autorisaient, est une performance impressionnante. Cela étant, les Grecs n'auraient pas admis une telle démonstration, dans la mesure où celle-ci fait appel à des notions qu'ils auraient refusé de considérer licites dans le

[7] *La Géométrie* (1637), livre II : « De la nature des lignes courbes » (AT VI, 389-390).

champ de la géométrie, parce que ces notions leur auraient fait quitter le champ du « voir » où la géométrie devait se déployer.
Pour établir une telle démonstration, il faut en effet passer des figures de la géométrie aux équations qui correspondent à leur tracé, c'est-à-dire passer de la géométrie à l'algèbre. Et ce n'est pas pour rien que cette branche des mathématiques d'aujourd'hui qu'on appelle l'algèbre ne porte pas un nom grec, mais un nom arabe. L'algèbre, où la « vision » se perd, était étrangère à l'esprit dans lequel les Grecs pratiquaient les mathématiques et, en particulier, à la géométrie. Du point de vue moderne, cela apparaît comme une limite aux mathématiques grecques. Il faut aussi être conscient que, du point de vue des Grecs, ce qui à nous apparaît comme des limites qui empêchaient les mathématiques de se développer plus avant, constituait pour eux des limites qui définissaient le champ mathématique. En les outrepassant, on serait sorti selon eux des mathématiques.

Les Modernes ont élargi le champ des mathématiques en se confiant à l'opératoire. Opératoire déjà au cœur des mathématiques anciennes, mais que le paradigme de la « vision » et l'absence d'une écriture symbolique adéquate empêchaient de pleinement reconnaître, dont ils empêchaient de tirer parti.
Si les mathématiques anciennes étaient menacées de sclérose par les courtes limites imposées à l'opératoire, les mathématiques modernes sont, quant à elles, exposées à l'emballement opératoire. L'axiomatique est une manière d'asseoir un édifice dont la consistance peut, au fil des développements, devenir douteuse. On sait cependant que l'axiomatique, dès lors qu'elle inclut en son sein l'arithmétique, ne saurait être une garantie absolue. Pour autant, l'immense majorité des mathématiciens ne sont pas tourmentés un seul instant, dans leur pratique, par la question des fondements de leur discipline. Dans son introduction à la théorie des ensembles, Bourbaki reconnaissait le problème.

> Depuis cinquante ans qu'on a formulé avec assez de précision les axiomes de la théorie des ensembles et qu'on s'est appliqué à en tirer des conséquences dans les domaines les plus variés des mathématiques, on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais. S'il en était autrement, c'est que la contradiction observée serait inhérente aux principes mêmes qu'on a mis à la base de cette théorie ; ceux-ci seraient donc à modifier, sans compromettre si possible les parties de la mathématique auxquelles on tient le plus.
>
> N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles* (1970), Introduction E I.13.

En fait, cette inquiétude était exprimée pour la forme, avec la conviction que si un problème survenait, une modification adéquate des axiomes permettrait de le résoudre sans mettre en danger l'édifice. Qu'est-ce qui, au fond, permet pareille assurance ?
Quand les mathématiques, à l'époque moderne, se sont de plus en plus éloignées de l'intuition sensible, et se sont de plus en plus confiées à une écriture symbolique, le soupçon aurait pu

naître que les mathématiques devenaient, précisément, un pur jeu d'écriture, de plus en plus arbitraire et vain.

Ce qui a toujours dissipé ce soupçon, ce sont les réussites des sciences mathématiques de la nature, qui n'ont jamais cessé de venir confirmer la valeur des notions et constructions mathématiques. Même les pans des mathématiques qui ne sont pas directement concernés se trouvent, pas contiguïté, légitimés. Quant aux sciences mathématiques de la nature, elles se confirment d'une part par l'expérimentation, d'autre part par la technologie.

Si j'ai accordé tant d'importance, dans mon propos, à la redécouverte de Platon à partir du XVe siècle en Europe, et à ce qui s'en est suivi, très différent de l'inspiration platonicienne originelle, c'est que ces événements ont eu une importance décisive sur le cours du monde. Je rappelle qu'au XVIe siècle, l'Europe et la Chine se situaient, quant à la technique, à des niveaux comparables, avec dans quelques domaines un certain avantage à la Chine. Au XIXe siècle, les Européens ont fait la loi en Chine, grâce à la supériorité écrasante de leur armement. Que s'était-il passé entretemps, à même d'expliquer le phénomène ? Un événement capital fut l'apparition, à partir du XVIIe siècle, des sciences mathématiques de la nature et le développement, à partir du XIXe siècle, d'une nouvelle catégorie de techniques, solidaires de ces sciences mathématiques de la nature et que, pour les différencier de l'ancien régime de la technique, je préfère appeler technologies, en ce qu'elles sont inimaginables sans le *logos* des sciences mathématiques de la nature.

Ces technologies sont devenues, à partir du XIXe siècle, les principales dispensatrices de la puissance. Au fil de mes lectures, je suis tombé sur ce passage révélateur, écrit en 1900 par un lettré chinois que ses idées réformatrices, peu prisées par l'impératrice douairière Cixi, avaient forcé à l'exil. D'Australie, il écrivit ceci à un ami demeuré en Chine :

> Les merveilles de ce pays et des nations occidentales nous sont, pour la plupart, inconnues et nous paraissent incroyables. […] Vénérable frère aîné, votre esprit supérieur, tout en reconnaissant l'ingéniosité surprenante des nations occidentales, n'en posera pas moins la question : « Toutes ces merveilles rendent-elles les gens plus heureux ? » Il est difficile de répondre à pareille question. Beaucoup se la posent. Tous sont dans le brouillard du doute. […] Ce qui est certain, c'est que le genre humain progresse dans la connaissance. Et que ceux qui ne suivent pas le rythme des nations les plus avancées se retrouvent victimes de ces nations, comme nous l'avons été. Qu'est-ce que le bonheur ? En tout cas, ce n'est pas le bonheur d'être soumis à la volonté d'étrangers, et spolié de son territoire. Pour être heureux, il faut être fort, pour être fort, il faut disposer de richesses. Avec des richesses, il est possible de s'armer afin de se défendre et d'être respecté. C'est pourquoi nous devons recourir aux moyens occidentaux, aux machines et à la science, qui produisent les richesses et donnent du pouvoir.
>
> Lettre du 13 mars 1900, dans HWUY-UNG, *A Chinaman's Opinion of Us and of His Own Country*, trad. John A. Makepeace, Londres, Chatto & Windus, 1927, p. 44-46.

C’est pour sortir de la longue suite d’humiliations qui lui furent infligées, du déclenchement de la première guerre de l’opium, en 1839, à l’envahissement par le Japon en 1937, qu’après la Seconde Guerre mondiale la Chine a entrepris de devenir à son tour une grande puissance technologique. Et c’est pour cela, également, qu’elle a investi massivement dans la formation de mathématiciens, d’abord en envoyant des jeunes étudier dans les universités occidentales, ensuite en développant des départements de mathématiques au sein de ses propres universités.
Aujourd’hui, la technologie est devenue la véritable garante de l’activité mathématique, et ce à double titre.
— D’une part, comme je l’ai dit, en l’absence d’assurance théorique à toute épreuve, les succès technologiques apportent en permanence une assurance pratique à la consistance des mathématiques. On a beaucoup glosé sur la carrière d’un homme comme John von Neumann. Celui-ci, dans sa jeunesse, était un disciple de Hilbert, et cherchait avec ardeur à réaliser le programme proposé par le maître, à savoir établir que les mathématiques dans leur ensemble peuvent être exprimées dans un langage formel, que toutes les propositions vraies peuvent être prouvées au sein de ce formalisme, que la cohérence de ce système est assurée et qu’il existe un algorithme permettant de décider pour toute proposition si celle-ci est vraie ou fausse. Les théorèmes de Gödel sont rapidement venus montrer que ce programme ne pouvait être accompli. Neumann, quant à lui, s’est de plus en plus impliqué au cours de son existence dans des projets technologiques, qu’il s’agisse de la mise au point des premières bombes nucléaires, ou celle des premiers ordinateurs. On peut voir dans ce changement d’orientation un revirement complet. On peut aussi y voir la continuation d’un même projet de confirmation de la consistance des mathématiques, une fois la voie théorique fermée par les théorèmes d’incomplétude de Gödel.
— Par ailleurs, la technologie ne vient pas seulement pallier, par ses réussites, l’impossibilité de démontrer théoriquement la consistance des mathématiques. Elle s’avère également un soutien majeur de la place que nos sociétés leur ménagent, de l’intérêt qu’elles leur portent et de l’énergie qu’elles leur consacrent.
C’est là une réalité que les mathématiciens œuvrant dans ce qu’on appelle les mathématiques pures sont généralement peu enclins à examiner, et pour avoir consacré de nombreuses années aux mathématiques je m’inclus tout à fait dans le lot. J’ai pratiqué les mathématiques comme une discipline de l’esprit n’ayant rien à voir avec un quelconque souci pratique, voire même constituant une défense vis-à-vis de tout souci pratique. Il a fallu, dans mon cas, la lecture de Simone Weil pour me faire convenir que cette impression, pour sincère qu’elle était en tant qu’impression, empêchait de reconnaître certains faits.
Simone Weil était la sœur cadette d’André Weil, un des mathématiciens importants du XX^e siècle, un des membres fondateurs et des plus actifs du groupe Bourbaki. Simone a toute sa vie été portée vers les mathématiques. Mais cela, parce qu’elle envisageait les mathématiques dans une perspective pythagorico-platonicienne, en tant qu’exercice spirituel pourrait-on dire. Et elle déplorait que la modernité, tout en cultivant les mathématiques comme jamais auparavant, ait perdu de vue cette dimension spirituelle. On comprend l’émerveillement que

suscita en elle, de prime abord, l'entreprise du collectif Bourbaki, qui entendait offrir une présentation renouvelée et cohérente des mathématiques à partir des structures les plus fondamentales. Il s'agissait de dépasser l'éparpillement des mathématiques pour que vive *la* mathématique. Dans la *pureté* recherchée, Simone voulait voir une résurgence de l'esprit pythagorico-platonicien. Si les réunions du groupe Bourbaki, auxquelles elle assista, la déçurent, c'est qu'elle eut le sentiment que l'idéal poursuivi par ces mathématiciens, pourtant aussi éloignés de toute préoccupation pratique qu'on puisse l'imaginer, ne correspondait pas à l'esprit de vérité qu'elle avait d'abord cru les animer. Et même chez eux elle décelait, quoi qu'ils en aient, le rôle de la technologie en arrière-plan – non pas comme motivation directe mais, précisément, comme arrière-plan, qui conférait à leur activité un prestige dont sans cela elle aurait été dépourvue, et sans lequel ils ne seraient sans doute pas devenus mathématiciens. Voici ce qu'elle a écrit à ce propos dans sa toute dernière œuvre.

> La technique est pour une si grande part dans le prestige de la science qu'on inclinerait à supposer que la pensée des applications est un stimulant puissant pour les savants. En fait, ce qui est un stimulant, ce n'est pas la pensée des applications, c'est le prestige même que les applications donnent à la science. […]
> En même temps certains d'entre eux, ceux dont les recherches sont surtout théoriques, tout en goûtant cette ivresse, sont fiers de se dire indifférents aux applications techniques. Ils jouissent ainsi de deux avantages en réalité incompatibles, mais compatibles dans l'illusion ; ce qui est toujours une situation extrêmement agréable. […] Ils ne se rendent pas compte que dans la conception actuelle de la science, si l'on retranche les applications techniques, il ne reste plus rien qui soit susceptible d'être regardé comme un bien. […] Sans la technique, personne aujourd'hui dans le public ne s'intéresserait à la science ; et si le public ne s'intéressait pas à la science, ceux qui suivent une carrière scientifique en auraient choisi une autre. Ils n'ont pas le droit à l'attitude de détachement qu'ils assument. Mais quoiqu'elle ne soit pas légitime, elle est un stimulant.
>
> Simone WEIL, *L'Enracinement* (1943)
> Paris, Flammarion, coll. « Champs classiques », 2014, p. 308-309.

Certes André Weil, son frère, ne partageait pas cet avis. Il y a moyen de comprendre son point de vue sans pour autant rejeter celui de sa sœur. Celle-ci elle-même écrit :

> L'esprit de vérité peut résider dans la science à la condition que le mobile du savant soit l'amour de l'objet qui est la matière de son étude. Cet objet, c'est l'univers dans lequel nous vivons. Que peut-on aimer en lui, sinon sa beauté ? La vraie définition de la science, c'est qu'elle est l'étude de la beauté du monde.
>
> Simone WEIL, *L'Enracinement*, p. 314.

La beauté qu'étudiait son frère lui échappait peut-être, elle n'en était pas moins réelle pour André.
Cela étant, qui s'adonne aux mathématiques doit encore avoir les moyens de le faire, et sur ce point Simone Weil a raison – c'est en raison de la technologie que nos sociétés donnent à des personnes les moyens de vivre en se consacrant aux mathématiques. De ce point de vue, la technologie n'est pas, pour nombre de mathématiciens, une cause de leur activité, mais une condition de possibilité.
Si j'ai évoqué André et Simone Weil c'est que, dans leurs deux figures, se condense la confrontation entre une conception moderne des mathématiques d'une part, la conception pythagorico-platonicienne des mathématiques d'autre part – la confrontation entre mathématiques et μαθηματα. À la fois la parenté, et l'étrangeté.

André Weil (1906-1998) et Simone Weil (1909-1943) à Knokke-Le Zoute, 1922