

Groupe fondamental étale et courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$

C. Savel

Mémoire (Master 2)
Soutenu le 10 juin 2011

Jury : A. Ducros (Examineur)
E. Lepage (Examineur)
M. Romagny (Directeur du mémoire)

Résumé

Etant donné une catégorie galoisienne, on construit en suivant [SGA1] le groupe fondamental associé. On applique alors cette construction à la catégorie des revêtements étales d'un schéma connexe localement noethérien, en vérifiant les axiomes nécessaires. On termine par le calcul du groupe fondamental étale des courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$, par voie transcendante, à l'aide des théorèmes GAGA.

La construction du groupe fondamental, de nature catégorique, est donnée dans la première partie après un certain nombre de rappels.

La vérification du fait que la catégorie des revêtements étales est galoisienne est l'objet de la seconde partie. La démonstration de l'existence des quotients par des groupes finis dans cette catégorie occupe notamment une place importante.

Enfin dans la dernière partie on montre comment associer à tout schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$ un espace analytique, ce qui permettra via les théorèmes du type GAGA de Serre de ramener le calcul du groupe fondamental des courbes projectives lisses sur $\mathbb{C}$ à des résultats de topologie.

Table des matières

1	Le groupe fondamental d'une catégorie galoisienne	4
1.1	Actions de groupes profinis	4
1.2	Rappels catégoriques	5
1.3	Catégories galoisiennes	7
1.4	Le théorème principal	8
2	Revêtements étales	18
2.1	Résultats préliminaires	18
2.2	Quotients de schémas	21
2.3	La catégorie des revêtements étales	29
3	Théorèmes GAGA et groupe fondamental	34
3.1	Espace analytique associé à un $\mathbb{C}$ -schéma	34
3.2	Les théorèmes GAGA	39
3.3	Groupe fondamental d'une courbe projective lisse	43

1 Le groupe fondamental d'une catégorie galoisienne

On construit dans cette partie le groupe fondamental associé à une catégorie galoisienne. La construction est faite dans la quatrième section. Des rappels et définitions sont donnés dans les sections précédentes.

1.1 Actions de groupes profinis

Définition 1 *Un groupe profini est un groupe topologique compact et totalement discontinu.*

Remarque 1 *On montre qu'un groupe topologique est un groupe profini ssi il s'écrit comme limite projective de groupes topologiques finis discrets.*

Lemme 1 *Si $((X_i)_{i \in I}, \alpha_{ij} : X_j \rightarrow X_i)$ est un système projectif (filtrant) d'espaces topologiques compacts non-vides alors*

$$\varprojlim_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

Preuve : Pour tout $j \in I$, soit $Y_j = \{(x_i) \in \prod X_i ; \alpha_{ij}(x_j) = x_i, \forall i \leq j\}$. Les X_i sont non-vides donc par l'axiome du choix on a $Y_j \neq \emptyset$, et on montre que ce sont des fermés (les X_i sont séparés). Si $j \leq j'$ on a l'inclusion $Y_{j'} \subseteq Y_j$, donc une intersection finie de Y_j est non-vide puisque I est filtrant, et par Tychonoff on obtient

$$\varprojlim_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in I} Y_j \neq \emptyset. \quad \square$$

Remarque 2 *Dans la suite, par une action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique X on entend une action telle que $G \times X \rightarrow X$ est continue. Si X est un ensemble fini muni de la topologie discrète, cela revient à demander que les stabilisateurs pour l'action soient des sous-groupes ouverts de G .*

Proposition 1 *Soit $((G_i)_{i \in I}, \alpha_{ij} : G_j \rightarrow G_i)$ un système projectif (filtrant) de groupes topologiques finis discrets avec les α_{ij} surjectifs. Si le groupe profini $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ agit continûment sur un ensemble fini discret E , alors il existe $i \in I$ tel que l'action de G se factorise par G_i .*

Preuve : Notons $p_i : G \rightarrow G_i$ les projections, et montrons que ce sont des surjections. Fixons $j \in I$, alors l'ensemble $I_j = \{i \in I; i \geq j\}$ est cofinal dans I , d'où $\varprojlim_{i \in I} G_i \cong \varprojlim_{i \in I_j} G_i$. Ainsi on peut montrer que p_j est surjective en

supposant $i \geq j$ pour tout $i \in I$. Soit $x_j \in G_j$, et $Y_i = \alpha_{ji}^{-1}(x_j)$ pour $i \in I$. Par hypothèse les Y_i sont des compacts non-vides, or si $r, s \in I$ avec $r \leq s$ on a $\alpha_{rs}(Y_s) \subseteq Y_r$. Par le lemme 1, la limite projective $\varprojlim_{i \in I} Y_i$ est non-vide.

Or $\varprojlim_{i \in I} Y_i \subseteq \varprojlim_{i \in I} G_i$, donc x_j est dans l'image de p_j .

Maintenant si G agit par

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}(E),$$

l'action est continue donc $\text{Ker}(\varphi) \triangleleft G$ est ouvert en tant qu'intersection des stabilisateurs. Or les $\text{Ker}(p_i)$ forment une base de voisinages du neutre de G , donc il existe $i \in I$ tel que $\text{Ker}(p_i) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ et on a la factorisation

$$\begin{array}{ccc} & G & \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}(E) \\ p_i \swarrow & \downarrow & \nearrow \\ G_i & \dashrightarrow G/\text{Ker}(\varphi) & \end{array}$$

puisque p_i est surjective. $\square$

1.2 Rappels catégoriques

Définition 2 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie,

– (i) Soit

$$X \xrightarrow{u} Y \begin{array}{c} \xrightarrow{v} \\ \xrightarrow{w} \end{array} Z \quad (D)$$

un diagramme dans $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C} = \text{Ens}$ le diagramme est dit exact si u induit une bijection de X sur $\{y \in Y; v(y) = w(y)\}$.

Si $\mathcal{C}$ est quelconque, le diagramme est dit exact si pour tout $T \in \mathcal{C}$ le diagramme

$$X(T) \longrightarrow Y(T) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} Z(T)$$

est exact, où $X(T) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$. On dit alors que u est un noyau de (v, w) .

- (ii) Dualement, un diagramme dans $\mathcal{C}$ de la forme

$$X \xleftarrow{u} Y \xleftarrow[w]{v} Z$$

est dit exact si le diagramme

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow[w^{op}]{v^{op}} Z$$

l'est.

Définition 3 Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories avec limites projectives finies, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. F est dit exact à gauche si F commute aux limites projectives finies.

Remarque 3 Cela revient à demander que F commute aux objets terminaux et aux produits fibrés, ou encore que F commute aux produits finis et aux diagrammes de la forme (D) ci-dessus, sachant que dans une catégorie, il y a équivalence entre existence

- (i) des limites projectives finies
- (ii) d'un objet terminal et des produits fibrés
- (iii) des produits finis et des noyaux.

Définition 4 Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dans laquelle les produits fibrés existent. On dit que $u : X \rightarrow Y$ est un épimorphisme strict si le diagramme

$$X \xleftarrow{u} Y \xleftarrow[p_2]{p_1} X \times_Y X$$

est exact.

Remarque 4 –

- (i) Un épi strict qui est un mono est un iso.
- (ii) Dans la catégorie des ensembles, un épi strict est simplement un épi.

Définition 5 Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $X \in \mathcal{C}$ et G un groupe agissant à droite par automorphismes sur X (i.e. muni d'un antimorphisme $G \rightarrow \text{Aut}(X)$). Considérons le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ Z & \longmapsto & \text{Hom}(X, Z)^G \end{array}$$

(G agit à gauche sur $\text{Hom}(X, Z)$ par composition). Un quotient de X par G est un objet (Y, p) représentant ce foncteur.

1.3 Catégories galoisiennes

Définition 6 Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite galoisienne si elle est essentiellement petite et si elle vérifie les axiomes suivants :

- (G1) $\mathcal{C}$ possède un objet final et le produit fibré de deux objets au-dessus d'un troisième existe dans $\mathcal{C}$.
- (G2) Les sommes finies existent dans $\mathcal{C}$ (donc aussi un objet initial $\emptyset_{\mathcal{C}}$), ainsi que le quotient d'un objet de $\mathcal{C}$ par un groupe fini d'automorphismes.
- (G3) Tout morphisme $u : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$ se factorise en un produit $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$ avec u' un épimorphisme strict et u'' un monomorphisme induisant un isomorphisme sur un sommande direct de Y ,

il existe un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}f$ (où $\mathbf{Ens}f$ est la catégorie des ensembles finis) tel que

- (G4) Le foncteur F est exact à gauche (i.e. envoie un objet final sur un objet final et commute aux produits fibrés).
- (G5) F commute aux sommes directes finies, transforme un épimorphisme strict en un épimorphisme (strict), et commute au passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes.
- (G6) Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)$ est un isomorphisme, u est un isomorphisme.

On dit alors que F est un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$.

Donnons des exemples de catégories galoisiennes :

- (1) Si B est un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe, la catégorie $\mathcal{C}_B^{top}$ des revêtements topologiques finis est une catégorie galoisienne pour lequel un foncteur fibre est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_B^{top} & \longrightarrow & \mathbf{Ens}f \\ X \xrightarrow{f} B & \longmapsto & f^{-1}(b) \end{array}$$

avec $b \in B$ un point base fixé.

- (2) Si Π est un groupe profini, on note $\mathcal{C}(\Pi)$ la catégorie des ensembles finis discrets munis d'une action continue de Π . Alors $\mathcal{C}(\Pi)$ est une catégorie galoisienne, un foncteur fibre est le foncteur d'oubli $For : \mathcal{C}(\Pi) \rightarrow \mathbf{Ens}f$. Il se trouve que toute catégorie galoisienne est de

cette forme, c'est l'objet du théorème 1.

- (3) On verra dans la suite que si S est un schéma connexe localement noethérien, $\bar{a} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ un point géométrique de S à valeurs dans un corps algébriquement clos Ω , la catégorie des revêtements étales de S (c'est à dire des morphismes finis étales $X \xrightarrow{f} S$) est une catégorie galoisienne. Un foncteur fibre est

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \longmapsto & |X \times_S \Omega|. \\ S & & \end{array}$$

1.4 Le théorème principal

Théorème 1 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie galoisienne, F un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$. Alors il existe un groupe profini π tel que F se factorise en une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \text{Ens}f. \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{C}(\pi) & \end{array}$$

Preuve : On va avoir besoin d'un certain nombre de résultats intermédiaires.

Lemme 2 *On a :*

- (i) *Un morphisme $u : X \rightarrow Y$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme strict) ssi $F(u)$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme strict).*
- (ii) *Si $X \in \mathcal{C}$, X est un objet initial (resp. objet final) ssi $F(X)$ l'est.*

Preuve : En effet, u est un mono ssi la diagonale $\Delta_u : X \rightarrow X \times_Y X$ est un iso ssi $F(\Delta_u)$ est un iso (par G6) ssi $\Delta_{F(u)}$ est un iso (par G4) ssi $F(u)$ est un mono.

Maintenant si u est un épi strict, $F(u)$ aussi par (G5). Réciproquement, supposons que $F(u)$ est un épi strict. On a alors une factorisation $X \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{u''} Y$. $F(u)$ est un épi (strict) donc $F(u'')$ aussi, c'est également un mono par ce qui précède, donc $F(u'')$ est un iso ainsi que u'' par (G6). D'où le (i).

Pour (ii), soit $\emptyset_{\mathcal{C}}$ un objet initial de $\mathcal{C}$, et pour tout $X \in \mathcal{C}$, notons u_X l'unique flèche de $\emptyset_{\mathcal{C}}$ dans X . Soit $X_0 \in \mathcal{C}$. Si $F(X_0) = \emptyset$, $F(u_{X_0})$ a pour but

$\emptyset$ donc $F(\emptyset_{\mathcal{C}}) = \emptyset$ et $F(u_{X_0})$ est un iso, donc u_{X_0} également.
Réciproquement si X_0 est initial, on a l'isomorphisme $(u_{X_0}, Id_{\emptyset_{\mathcal{C}}}) : \emptyset_{\mathcal{C}} \sqcup X_0 \xrightarrow{\sim} X_0$, donc un iso $F(\emptyset_{\mathcal{C}}) \sqcup F(X_0) \xrightarrow{\sim} F(X_0)$ (par (G5)) et ainsi $|F(\emptyset_{\mathcal{C}})| = 0$ et $F(\emptyset_{\mathcal{C}}) = \emptyset$. $\square$

Corollaire 1 *Tout objet de $\mathcal{C}$ est artinien.*

Preuve : Pour toute suite de mono $\dots \xrightarrow{u_2} X_2 \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{u_0} X_0 = X$, on obtient une suite de mono $\dots \hookrightarrow F(X_2) \hookrightarrow F(X_1) \hookrightarrow F(X_0)$, mais $F(X_0)$ est un ensemble fini donc pour $n \gg 0$ les $F(u_n)$ sont des iso, ainsi que les u_n par (G6). $\square$

On en déduit une décomposition des objets de $\mathcal{C}$ en sommes finies d'objets connexes :

Définition 7 *Un objet X de $\mathcal{C}$ est dit vide (noté $X = \emptyset$) si c'est un objet initial de $\mathcal{C}$. X est dit connexe s'il n'est pas somme de deux objets non-vides de $\mathcal{C}$.*

Proposition 2 *Soit $X \in \mathcal{C}$. X est connexe ssi tout mono d'un objet non-vide vers X est un iso. De plus si $X \neq \emptyset$, X s'écrit de manière unique à l'ordre près comme somme disjointe finie d'objets connexes non-vides.*

Preuve : Si X est connexe et $Y \xrightarrow{u} X$ est un mono avec Y non-vide, on utilise la factorisation $Y \rightarrow Y' \rightarrow X$ donnée par (G3). Y est non-vide donc Y' aussi (lemme 2), et comme $Y' \rightarrow X$ est un iso sur un sommande direct de X connexe, c'est un iso. Donc u est un mono et un épi strict, donc un iso, et la condition est nécessaire.

Elle est suffisante : si $X = Y \sqcup Y'$ avec Y non-vide alors le morphisme $Y \rightarrow X$ est un mono par le lemme 2, donc un iso et $Y' = \emptyset$.

Pour l'existence de la décomposition, le fait que X est artinien montre qu'il existe un mono $u : X_1 \rightarrow X$ avec X_1 connexe non-vide. On raisonne alors par récurrence sur $|F(X)|$. Si $|F(X)| = 1$, $F(u)$ et u sont des iso et c'est terminé. Si $|F(X)| > 1$, on peut supposer X non connexe, on factorise u en $X_1 \xrightarrow{u'} X' \xrightarrow{u''} X$ et il existe $X'' \neq \emptyset$ tel que $X = X' \sqcup X''$. u est un mono donc u' également et u' est un iso, ainsi X' est connexe. Alors $|F(X'')| < |F(X)|$ et on a le pas de récurrence.

Enfin on montre l'unicité : si

$$X = \prod_{i=1}^r X_i = \prod_{j=1}^s Y_j,$$

alors par (G5) si $1 \leq i \leq r$, il existe un unique $\sigma(i)$, $1 \leq \sigma(i) \leq s$ tel que $F(X_i) \cap F(Y_{\sigma(i)}) \neq \emptyset$. L'axiome (G4) donne alors $F(X_i \times_X Y_{\sigma(i)}) = F(X_i) \cap F(Y_{\sigma(i)}) \neq \emptyset$, d'où $X_i \times_X Y_{\sigma(i)}$ est non-vide. Or les projections sur les deux facteurs de $X_i \times_X Y_{\sigma(i)}$ sont des mono, car ce sont des tirés en arrière des mono $X_i \hookrightarrow X$ et $Y_{\sigma(i)} \hookrightarrow X$. Donc par le début de la preuve ce sont des iso et on a $X_i \simeq Y_{\sigma(i)}$. On montre alors que σ est une permutation. $\square$

Définition 8 Si $X = \coprod_{i=1}^r X_i$ est une décomposition de $X \neq \emptyset$ en somme d'objets connexes non-vides, on dit que $X_1, \dots, X_r$ sont les composantes connexes de X .

On introduit maintenant une catégorie, appelée catégorie pointée associée à $\mathcal{C}$ et F , que l'on note $\mathcal{C}^{pt}$. Les objets de $\mathcal{C}^{pt}$ sont les couples (X, x) où X est un objet non-vide de $\mathcal{C}$ et $x \in F(X)$, et où un morphisme de (X, x) dans (Y, y) est un morphisme u de X dans Y dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)(x) = y$. Si X, Y sont deux objets de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}^{pt}$) on dit que X domine Y et on note $X \geq Y$ s'il existe un morphisme de X dans Y .

Proposition 3 On a :

- (i) Si $(X_0, x_0), (X, x) \in \mathcal{C}^{pt}$ avec X_0 connexe, il existe au plus un morphisme de (X_0, x_0) dans (X, x) .
- (ii) Si $(X_1, x_1), \dots, (X_r, x_r)$ sont des objets de $\mathcal{C}^{pt}$, il existe $(X, x) \in \mathcal{C}^{pt}$ connexe tel que $(X, x) \geq (X_i, x_i) \forall i$.
- (iii) Si $X \in \mathcal{C}$, il existe $(X_0, x_0) \in \mathcal{C}^{pt}$ connexe tel que l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_{x_0} : Hom_{\mathcal{C}}(X_0, X) &\longrightarrow F(X) \\ u : X_0 \rightarrow X &\longmapsto F(u)(x_0) \end{aligned}$$

soit bijective.

Preuve : (i) Si u, v sont deux tels morphismes, notons $i : Y \rightarrow X_0$ leur noyau (qui existe par (G1)). Par (G4) $F(i) : F(Y) \rightarrow F(X_0) = Ker(F(u), F(v))$. On a $F(Y) \neq \emptyset$ car x_0 est l'image d'un élément de $F(Y)$. Donc $Y \neq \emptyset$. X_0 est connexe et i est un mono donc i est un iso, et $u = v$.

Pour (ii), on se ramène à dominer un seul objet en considérant $X' = \prod_{i=1}^r X_i$ et $x' = (x_1, \dots, x_r)$. Alors si $X' = \coprod X'_i$ est la décomposition de X' en somme de composantes connexes, on a $F(X') = \coprod F(X'_i)$, donc il existe i et $x'_i \in F(X'_i)$ tel que la flèche canonique $X'_i \rightarrow X'$ envoie x'_i sur x' .

Enfin (iii) résulte de (i) et (ii). $\square$

Pour les objets connexes on a également les propriétés suivantes :

Proposition 4 *Si X_0 est un connexe, on a :*

- (i) *Tout morphisme $X \rightarrow X_0$ avec $X \neq \emptyset$ est un épi strict.*
- (ii) *Si $X_0 \rightarrow X$ est un épi strict, X est connexe.*
- (iii) *Tout endomorphisme de X_0 est un automorphisme.*

Preuve : (i) Appelons u le morphisme. Il se factorise en $X \xrightarrow{u'} X'_0 \xrightarrow{u''} X_0$, alors u'' est un mono vers un connexe, et est donc un iso puisque $X'_0 \neq \emptyset$.

Pour (ii) si $X = X_1 \sqcup X_2$ avec $X_1 \neq \emptyset$, soit $x_1 \in F(X_1)$ et $x_0 \in F(X_0)$ au-dessus ($F(u)$ épi). Par la proposition 3 il existe (X', x') connexe dominant (X_1, x_1) et (X_0, x_0) . Alors les composées $X' \rightarrow X_0 \rightarrow X$ et $X' \rightarrow X_1 \rightarrow X$ envoient x' sur x_1 donc coïncident. Mais d'après ce qui précède $X' \rightarrow X_0$ est un épi strict, donc $X' \rightarrow X_1 \rightarrow X$ est un épi strict, et $F(X_1) \rightarrow F(X)$ est un épi. Ainsi $X_2 = \emptyset$.

Enfin pour (iii) si X_0 est vide c'est clair. Sinon, $X_0 \xrightarrow{u} X_0$ se factorise en $X_0 \xrightarrow{u'} X \xrightarrow{u''} X_0$ par (G3). Alors X est non vide donc u'' est un iso, ainsi u est un épi strict. Donc $F(u)$ est une application surjective, or $|F(u)| < \infty$ donc $F(u)$ est un iso, et u aussi. $\square$

On a vu au-dessus que si $(X_0, x_0) \in \mathcal{C}^{pt}$ est connexe, l'application

$$\begin{aligned} ev_{x_0} : Hom_{\mathcal{C}}(X_0, X_0) &\longrightarrow F(X_0) \\ u &\longmapsto F(u)(x_0) \end{aligned}$$

est injective, d'où la définition :

Définition 9 *On dit qu'un objet connexe non-vide X_0 est galoisien si ev_{x_0} est bijective pour un $x_0 \in F(X_0)$.*

Remarque 5 *La notion d'objet galoisien ne dépend pas du foncteur fibre F choisi, malgré les apparences : pour un X_0 connexe non-vide il y a équivalence entre*

- (i) *X_0 est galoisien*
- (ii) *$Aut(X_0)$ agit transitivement sur $F(X_0)$*
- (iii) *$|Aut(X_0)| = |F(X_0)|$*
- (iv) *$X_0/Aut(X_0)$ est un objet final de $\mathcal{C}$.*

Le numéro (iv) donne une caractérisation intrinsèque à $\mathcal{C}$.

Proposition 5 *Pour tout X connexe non-vide il existe un morphisme $X' \rightarrow X$ avec X' galoisien et minimal pour ces propriétés, i.e tel que tout morphisme $X'' \rightarrow X$ avec X'' galoisien se factorise par $X' \rightarrow X$.*

Preuve : on aura besoin de l'unicité dans la factorisation donnée par (G3).

Lemme 3 *Si $X \xrightarrow{u} Z \xrightarrow{u'} Y$ et $X \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{v'} Y$ sont deux factorisations comme dans (G3) d'un morphisme $X \rightarrow Y$ alors il existe un unique iso α faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & u \nearrow & \downarrow \alpha & \nwarrow u' & \\ X & & & & Y \\ & v \searrow & \downarrow & \nearrow v' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

Preuve : Soit $(X \times_Z X, pr_1, pr_2)$ un carré fibré de X au-dessus de Z . u est un épi strict, donc le diagramme

$$Hom(Z, Z') \rightarrow Hom(X, Z') \rightrightarrows Hom(X \times_Z X, Z')$$

est exact. On a $v' \circ v \circ pr_1 = u' \circ u \circ pr_1 = u' \circ u \circ pr_2 = v' \circ v \circ pr_2$ donc $v \circ pr_1 = v \circ pr_2$ puisque v' est un mono. Donc il existe $\alpha : Z \rightarrow Z'$ tel que $v = \alpha \circ u$. En inversant les rôles de u et v on montre qu'il existe $\beta : Z' \rightarrow Z$ tel que $u = \beta \circ v$. Alors α et β sont des isos inverses l'un de l'autre puisque u, v sont des épis, et le diagramme commute. $\square$

Revenons à la preuve de la proposition.

Soit (X_0, x_0) connexe dominant X tel que l'évaluation $ev_{x_0} : Hom(X_0, X) \rightarrow F(X)$ soit bijective. Notons $F(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $u_i : X_0 \rightarrow X$ l'unique flèche envoyant x_0 sur x_i , $u : X_0 \rightarrow X^n$ le morphisme induit, de coordonnées $pr_i \circ u = u_i$, où les $pr_i : X^n \rightarrow X$ sont les projections, et

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X' \xrightarrow{i} X^n$$

une factorisation de u .

On peut supposer que (X_0, x_0) domine les (X', a) , $a \in F(X')$ (quitte à le remplacer par un connexe bien choisi et qui le domine).

Montrons que X' est galoisien : notons $a_0 = f_0(x_0)$, fixons $a \in F(X')$ et notons $f_a : X_0 \rightarrow X'$ l'unique morphisme tel que $f_a(x_0) = a$. X' est connexe car X_0 l'est, et ainsi f_a est un épi strict.

On en déduit que $Hom(X_0, X) = \{pr_1 \circ i \circ f_a, \dots, pr_n \circ i \circ f_a\}$. En effet si s, t

sont tels que $pr_s \circ i \circ f_a = pr_t \circ i \circ f_a$ alors $pr_s \circ i = pr_t \circ i$ puisque f_a est un épi, d'où $u_s = pr_s \circ i \circ f_0 = u_t$ et $s = t$.

Donc il existe une permutation σ telle que $pr_s \circ i \circ f_0 = pr_{\sigma(s)} \circ i \circ f_a$ pour tout s . Notons $\Sigma : X^n \rightarrow X^n$ le morphisme tel que $pr_s \circ \Sigma = pr_{\sigma(s)}$ (c'est donc un iso). On obtient $pr_s \circ i \circ f_0 = pr_s \circ \Sigma \circ i \circ f_a$ et donc $i \circ f_0 = \Sigma \circ i \circ f_a$ pour tout s . Donc par le lemme 3, il existe un iso $\alpha \in \text{Aut}(X')$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & & \\ & f_0 \nearrow & \downarrow \alpha & \nwarrow i & \\ X_0 & & & & X^n \\ & f_a \searrow & \downarrow \Sigma \circ i & \nearrow & \\ & & X' & & \end{array}$$

donc tel que $\alpha(a_0) = \alpha(f_0(x_0)) = f_a(x_0) = a$. Donc $\text{Aut}(X')$ agit transitivement sur $F(X')$.

Enfin vérifions la minimalité : soit $X'' \xrightarrow{f} X$ un morphisme avec X'' galoisien. Alors f , $F(f)$ sont des épis stricts, et pour tout s il existe $x''_s \in F(X'')$ tel que $f(x''_s) = x_s$. Mais X'' est galoisien, donc il existe $\phi_s \in \text{Aut}(X'')$ tel que $\phi(x''_1) = x''_s$. Soit $h = (f \circ \phi_1, \dots, f \circ \phi_n) : X'' \rightarrow X^n$ et enfin soit $X'' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{j} X^n$ une factorisation de h . Z est connexe et on a $j(g(x''_1)) = (x_1, \dots, x_n) = i(a_0)$ donc par la proposition 2 il existe une flèche k telle que $i \circ k = j$. Ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{f} & X \\ g \searrow & & \nearrow pr_1 \\ & Z \xrightarrow{j} X^n & \\ & \searrow k \quad \nearrow i & \\ & & X' \end{array}$$

commute, et f se factorise par $pr_1 \circ i$. $\square$

Notons I l'ensemble préordonné filtrant des classes d'isomorphisme de galoisiens pointés (X, x) (c'est un ensemble car $\mathcal{C}$ est essentiellement petite, préordonné par la relation de domination définie plus haut, et filtrant par les propositions 3 et 5), $(P_i, p_i)_{i \in I}$ un système de représentants.

Si $i \leq j$, il existe un unique morphisme $X_j \rightarrow P_i$ envoyant p_j sur p_i , ainsi on obtient un système projectif $\mathcal{P} = (P_i)_{i \in I}$.

$\mathcal{P}$ est un élément de la procatégorie $Pro(\mathcal{C})$ associée à $\mathcal{C}$: les objets de $Pro(\mathcal{C})$ sont les systèmes projectifs $((X_j)_{j \in J}, (f_j^k)_{j \leq k})$ dans $\mathcal{C}$ et l'ensemble des morphismes entre $(X_j)_j$ et $(Y_k)_k$ est

$$\varprojlim_k \varinjlim_j \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_j, Y_k).$$

En considérant un objet de $\mathcal{C}$ comme un système projectif indexé par un singleton on définit un foncteur pleinement fidèle $\iota : \mathcal{C} \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$.

Proposition 6 *Le foncteur F est pro-représentable par $\mathcal{P}$, plus précisément on a un isomorphisme de foncteurs*

$$\text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(.)) \xrightarrow{\sim} F$$

induit par les morphismes d'évaluation $ev_{p_i} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i, X) \rightarrow F(X)$.

De plus on a

$$\text{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \varprojlim_{i \in I} \text{Aut}(P_i) = \text{Aut}(\mathcal{P}).$$

Preuve : On a

$$\text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X)) \cong \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i, X)$$

fonctoriellement en $X \in \mathcal{C}$.

Pour X fixé, les morphismes d'évaluation $ev_{p_i} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i, X) \rightarrow F(X)$ induisent des applications

$$\varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i, X) \rightarrow F(X)$$

qui sont injectives car les ev_{p_i} le sont, surjectives par les propositions 3 et 5. Ces applications varient fonctoriellement en X .

Pour la seconde partie, on a par définition

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}) &= \varprojlim_{i \in I} \varinjlim_{j \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_j, P_i) \\ &= \varprojlim_{i \in I} \text{Hom}(P_i, P_i) \\ &= \varprojlim_{i \in I} \text{Aut}(P_i) \end{aligned}$$

la deuxième égalité provenant du fait que pour i fixé, $\varinjlim_{j \in I} \text{Hom}(P_j, P_i) = \varinjlim_{j \geq i} \text{Hom}(P_j, P_i) = \text{Hom}(P_i, P_i)$.

Les morphismes de transition sont les morphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(P_{i'}) & \longrightarrow & \text{Aut}(P_i) \\ P_{i'} \xrightarrow{u} P_{i'} & \longmapsto & \text{l'unique } v \text{ faisant commuter} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P_{i'} & \xrightarrow{u} & P_{i'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_i & \xrightarrow{v} & P_i \end{array}$$

pour $i \leq i'$. $\square$

Ainsi $Aut(\mathcal{P}) = \varprojlim_{i \in I} Aut(P_i)$ a une structure de groupe profini, notons π le groupe profini opposé à $Aut(\mathcal{P})$:

$$\pi := Aut(\mathcal{P})^{op}.$$

Le foncteur F se factorise alors en $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}(\pi) \xrightarrow{For} Ens$. En effet si $X \in \mathcal{C}$, $Aut(\mathcal{P})$ agit à droite sur $Hom_{Pro(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X))$, donc π agit à gauche sur l'ensemble fini $F(X)$ via l'identification $Hom_{Pro(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X)) \cong F(X)$.

L'action de $Aut(\mathcal{P})$ à droite est continue sur $F(X)$: si l'on fixe $i \in I$ tel que $ev_{p_i} : Hom(P_i, X) \rightarrow F(X)$ est bijective, $Aut(\mathcal{P})$ agit sur $F(X)$ via $Aut(P_i)$, i.e. si $\varphi = (\varphi_j)_{j \in I} \in Aut(\mathcal{P})$ et $x = ev_{p_i}(v) \in F(X)$, on a $x \cdot \varphi = ev_{p_i}(v \circ \varphi_i)$. Enfin si $X \xrightarrow{u} Y$ est un morphisme, $F(u)$ est un π -homomorphisme car l'identification $Hom_{Pro(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X)) = F(X)$ est fonctorielle.

Il s'agit maintenant de construire un quasi-inverse G pour F . Si $E \in \mathcal{C}(\pi)$, on va prendre pour $G(E)$ un représentant du foncteur de $\mathcal{C}$ dans Ens

$$X \longmapsto Hom_{\mathcal{C}(\pi)}(E, Hom_{Pro(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X))),$$

auquel on doit penser comme à un " produit contracté $P \times_{\pi} E$ ". On procède en plusieurs étapes :

Proposition 7 *Soient Q un objet de $\mathcal{C}$ sur un lequel un groupe fini K opère à droite (i.e. muni d'un antimorphisme $K \rightarrow Aut(Q)$) et E un ensemble fini sur lequel K opère à gauche. Alors*

- (i) *Le foncteur*

$$X \mapsto Hom_K(E, Hom(Q, X))$$

est représentable.

- (ii) *Si $(Q \times_K E, f)$ est un représentant du foncteur donné en (i), alors $(F(Q \times_K E, f), F \circ f)$ est un représentant du foncteur*

$$E' \mapsto Hom_K(E, Hom_{\mathcal{C}(\pi)}(F(Q), E')).$$

En particulier si $F(Q) \times_K E$ est un représentant du second foncteur, le morphisme canonique $F(Q) \times_K E \rightarrow F(Q \times_K E)$ est un iso.

Preuve : Supposons d'abord que K agit transitivement sur $E (\neq \emptyset)$, fixons $a \in E$ et soit H le stabilisateur de a . Alors on vérifie que $Q \times_K E = Q/H$ convient, c'est à dire représente le foncteur de (i). (ii) est également vérifié pour E puisque le foncteur F commute aux quotients (G5).

Maintenant si E est quelconque on l'écrit comme somme disjointe de ses orbites $E = \coprod E_i$ et on vérifie alors que $Q \times_K E = \coprod Q \times_K E_i$. $\square$

On note $\pi_i := \text{Aut}(P_i)^{op}$, ainsi $\pi = \varprojlim_{i \in I} \pi_i$. Si $E \in \mathcal{C}(\pi)$ la proposition 1 montre que l'action de π factorise par l'un des π_i (les morphismes de transition $\pi_j \rightarrow \pi_i$ sont bien surjectifs).

Proposition 8 *Soit $E \in \mathcal{C}(\pi)$ et soit $i \in I$ tel que π_i opère déjà sur E . Alors $P_i \times_{\pi_i} E$ existe, E représente le foncteur*

$$E' \mapsto \text{Hom}_{\pi_i}(E, \text{Hom}_{\mathcal{C}(\pi)}(F(P_i), E')).$$

De plus si $i \leq j$, l'homomorphisme canonique $P_j \times_{\pi_j} E \rightarrow P_i \times_{\pi_i} E$ est un isomorphisme.

Preuve : On a déjà montré que $P_i \times_{\pi_i} E$ existe, c'est un cas particulier de la proposition précédente.

Pour l'assertion sur E , on a la bijection fonctorielle en E' ,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\pi_i}(E, \text{Hom}_{\mathcal{C}(\pi)}(F(P_i), E')) &\cong \text{Hom}_{\pi}(E, E') \\ f &\longmapsto \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E' \\ e & \mapsto & f(e)(p_i). \end{array} \end{aligned}$$

Ainsi le morphisme canonique $E \rightarrow F(P_i \times_{\pi_i} E)$ est un iso.

Si $i \leq j$, l'homomorphisme canonique $P_j \times_{\pi_j} E \rightarrow P_i \times_{\pi_i} E$ est un iso car son image par F en est un, et F est conservatif pour les iso (G6). $\square$

Corollaire 2 *Soit $E \in \mathcal{C}(\pi)$ et soit $i \in I$ tel que π_i opère déjà sur E . Alors $P_i \times_{\pi_i} E$ représente*

$$X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}(\pi)}(E, \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X))).$$

Preuve : Si $X \in \mathcal{C}$ et $j \geq i$ est tel que $ev_{p_j} : \text{Hom}(P_j, X) \rightarrow F(X)$ est bijective, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\pi}(E, \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X))) &\cong \text{Hom}_{\pi_j}(E, \text{Hom}(P_j, X)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_j \times_{\pi_j} E, X) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P_i \times_{\pi_i} E, X) \end{aligned}$$

et la bijection de $\text{Hom}_\pi(E, \text{Hom}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}, \iota(X)))$ dans $\text{Hom}(P_i \times_{\pi_i} E, X)$ obtenue ne dépend plus du j choisi, et est fonctorielle en X . $\square$

On définit maintenant le foncteur G ainsi : pour $E \in \mathcal{C}(\pi)$ on pose $G(E) := P_i \times_{\pi_i} E$, i tel que π_i opère déjà sur E . On a ainsi une bijection fonctorielle en E et X ,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(E), X) \cong \text{Hom}_\pi(E, \text{Hom}(\mathcal{P}, \iota(X))) \cong \text{Hom}_\pi(E, F(X)).$$

Ceci nous donne des morphismes de foncteurs $\alpha : \text{Id}_{\mathcal{C}(\pi)} \rightarrow FG$ et $\beta : GF \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}$.

Proposition 9 *Les morphismes α et β sont des iso.*

Preuve : Si $E \in \mathcal{C}(\pi)$, le morphisme $\alpha_E : E \rightarrow F(G(E)) = F(P_i \times_{\pi_i} E)$ est le morphisme canonique induit par l'identification

$$\text{Hom}_{\pi_i}(E, \text{Hom}_{\mathcal{C}(\pi)}(F(P_i), E')) \cong \text{Hom}_\pi(E, E'),$$

et on a vu dans la preuve de la proposition 8 que c'est un isomorphisme. Donc α est un iso.

Si maintenant $X \in \mathcal{C}$, par définition de α et β le composé

$$F(X) \xrightarrow{\alpha_{F(X)}} FGF(X) \xrightarrow{F(\beta_X)} F(X)$$

est simplement $\text{Id}_{F(X)}$. Or α est un iso d'après ce qui précède, donc $F(\beta_X)$ est un iso et β_X est un iso par (G6). $\square$

Cela conclut la preuve du théorème principal : les foncteurs F et G sont quasi-inverses l'un de l'autre et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}(\pi)$ est donc une équivalence de catégories. $\square$

Concernant l'unicité, on a le résultat suivant :

Proposition 10 *Soient G et G' deux groupes profinis. Alors tout foncteur $\Phi : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(G')$ qui est une équivalence de catégories est isomorphe à un foncteur provenant d'un isomorphisme de groupes profinis $\phi : G' \rightarrow G$.*

Preuve : Voir [Dou] 2.9.8, ou encore [SGA1] V 6.10. $\square$

2 Revêtements étales

L'objet de cette partie est de montrer que la catégorie des revêtements étales d'un schéma connexe localement noethérien est une catégorie galoisienne, ce qui est montré dans la troisième section.

On rassemble dans la première section un certain nombre de résultats utiles dans la suite, en particulier on fait des rappels sur les morphismes étales pour lesquels on réfère à [EGA4].

La deuxième section est consacrée à montrer l'existence de quotients catégoriques par des groupes finis dans la catégorie des revêtements étales.

2.1 Résultats préliminaires

Proposition 11 *Soient S un schéma localement noethérien, $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme localement de type fini, $x \in X$ et $s = f(x)$. On suppose de plus que $k(x) = k(s)$. Alors f est étale en x ssi le morphisme $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme sur les complétés.*

Preuve : Voir [EGA4], 17.6.3. $\square$

Lemme 4 *Soit $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas localement de présentation finie et $S' \rightarrow S$ un changement de base plat. Alors si $X' = X \times_S S' \xrightarrow{f'} S'$ est la projection et si $x' \in X'$ s'envoie sur $x \in X$, f' est étale en x' ssi f est étale en x .*

Preuve : Le fait que f' est étale en x' si f est étale en x est déjà connu. Supposons f' étale en x' , et montrons que f est plat et non ramifié en x . On note $s' \in S'$ et $s \in S$ les images. On a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{S,s} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \\ \text{plat} \downarrow & & \downarrow \text{plat} \\ \mathcal{O}_{S',s'} & \xrightarrow{\text{plat}} & \mathcal{O}_{X',x'} \end{array}$$

le composé $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X',x'}$ est plat or $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X',x'}$ est plat et local donc fidèlement plat, ainsi f_x est plat.

Concernant la non ramification on a $\Omega_{X'/S'}^1 = p^* \Omega_{X/S}^1$ en notant p la première projection. Donc

$$\Omega_{X/S,x}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X',x'} = \Omega_{X'/S',x'}^1 = 0$$

d'où $\Omega_{X/S,x}^1 = 0$ puisque $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X',x'}$ est fidèlement plat, et f' est non ramifié en x' . $\square$

Lemme 5 Soient $f : X \rightarrow X'$, $g : X' \rightarrow S$ des morphismes localement de présentation finie, $x \in X$ et x' , s ses images. Si $g \circ f$ et f sont étales en x , g est étale en x' .

Preuve : Montrons que g est plat et non ramifié en x' . On a

$$\underbrace{\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \underbrace{\mathcal{O}_{X',x'} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}}_{\text{plat}}}_{\text{plat}}$$

donc $g_{x'}$ est plat.

On a également $k(s) \rightarrow k(x') \rightarrow k(x)$ finie séparable, donc $k(s) \rightarrow k(x')$ est finie séparable. Enfin $\mathfrak{M}_s \mathcal{O}_{X',x'} = \mathfrak{M}_{x'}$ puisque

$$\begin{cases} (\mathfrak{M}_s \mathcal{O}_{X',x'}) \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{M}_s \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x'} \mathcal{O}_{X,x} \\ \mathfrak{M}_s \mathcal{O}_{X',x'} \subseteq \mathfrak{M}_{x'} \\ \mathcal{O}_{X',x'} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \text{ est fidèlement plat} \end{cases}$$

donc g est non ramifié en x' . $\square$

Lemme 6 Soient $X \xrightarrow{f} S$ un morphisme, $x \in X$ et $s \in S$ son image. Soit $S' \rightarrow S$ un changement de base, $x' \in X' = X \times_S S'$ au-dessus de x , s' son image. Alors si $k(s) = k(x)$, $k(s') = k(x')$.

Preuve : On se ramène à une situation affine :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{q} \subseteq E & \longrightarrow & E \otimes_C D \supseteq \mathfrak{r} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{p} \subseteq C & \longrightarrow & D \supseteq \mathfrak{q}' \end{array}$$

avec $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{r}$ des premiers s'envoyant par préimage les uns sur les autres. Montrons que $\text{Frac}(C/\mathfrak{p}) \rightarrow \text{Frac}(D/\mathfrak{q}')$ surjective entraîne $\text{Frac}(E/\mathfrak{q}) \rightarrow \text{Frac}(E \otimes_C D/\mathfrak{r})$ surjective.

En effet alors si $\bar{y} = \overline{\sum e_i \otimes \bar{d}_i} \in E \otimes_C D/\mathfrak{r}$, pour tout i il existe $\bar{c}_i \in C/\mathfrak{p}$, $\bar{c}_i \neq 0$ tel que $\bar{c}_i \bar{d}_i \in C/\mathfrak{p}$. Donc

$$\begin{aligned} (\prod_j \bar{c}_j) \cdot \bar{y} &= \overline{(\prod_j \bar{c}_j) \sum e_i \otimes d_i} \\ &= \overline{\sum e_i \otimes \prod_j \bar{c}_j d_i} \\ &= \overline{\sum \prod_j \bar{c}_j d_i e_i \otimes 1} \in E/\mathfrak{q} \end{aligned}$$

et on a la surjectivité. $\square$

Lemme 7 *Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme fini plat, S localement noethérien. Alors $f_*\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_S$ -module cohérent localement libre de rang fini.*

Preuve : f est fini et X, S localement noethériens donc $f_*\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Le reste de l'énoncé est de nature locale, on est donc ramené à prouver que si $A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux fini plat, avec A noethérien, alors pour tout $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ il existe $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que B_a soit un A_a -module libre de rang fini.

Soit donc $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. $B_{\mathfrak{p}}$ est fini plat sur $A_{\mathfrak{p}}$ local, donc est libre de rang fini : il existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ et $b_1, \dots, b_r \in B$ tels que $B_{\mathfrak{p}} = \oplus_i A_{\mathfrak{p}} \frac{b_i}{s}$.

On a une suite exacte de A_s modules

$$0 \rightarrow K \rightarrow A_s^r \xrightarrow{(\frac{b_1}{s}, \dots, \frac{b_r}{s})} B_s \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

K est un A_s -module de type fini (A_s noethérien) donc $\text{Supp}(K) = V(\text{Ann}(K))$ est un fermé de $\text{Spec}(A_s)$ ne contenant pas $\mathfrak{p}A_s$ (de même pour Q). Ainsi $U = (\text{Spec}(A_s) \setminus \text{Supp}(K)) \cap (\text{Spec}(A_s) \setminus \text{Supp}(Q))$ est un voisinage ouvert de $\mathfrak{p}$ dans $\text{Spec}(A)$. Il existe $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $\mathcal{D}(a) \subseteq U$, et ainsi B_a est un A_a module libre de rang fini. $\square$

Proposition 12 *Soient X et X' des S -schémas. On suppose X connexe et X' non ramifié et séparé sur S . Soient f, g deux S -morphisms de X dans X' et $x \in X$.*

Alors si $f(x) = g(x) = x'$ et si les homomorphismes résiduels $k(x') \rightarrow k(x)$ définis par f et g sont les mêmes, f et g coïncident.

Preuve : On considère les morphismes $f' = f \times \text{Id} : X \rightarrow X' \times_S X$ et $g' = g \times \text{Id} : X \rightarrow X' \times_S X$. Notons $p : X' \times_S X \rightarrow X'$ et $q : X' \times_S X \rightarrow X$ les projections.

Vérifions que $f'(x) = g'(x)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & & & X \\ & & & \nearrow \text{Id} & \uparrow q \\ \text{Spec}(k(x)) & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{f'} & X' \times_S X \\ & \searrow b & \searrow f & & \downarrow p \\ & & \text{Spec}(k(x')) & \longrightarrow & X' \end{array}$$

et de même pour g' puisque les homomorphismes résiduels $k(x') \rightarrow k(x)$ coïncident. D'où $f' \circ a = g' \circ a$ et $f'(x) = g'(x)$.

Il suffit de montrer que $f' = g'$ pour avoir la proposition. Or, f' et g' sont des sections de q qui est séparé non ramifié, ainsi f' et g' sont des immersions fermées étales donc également des immersions ouvertes (car un morphisme de type fini radiciel et étale est une immersion ouverte, voir [SGA1] I 5.1). X est connexe donc f' (resp. g') induit un iso f'' (resp. g'') de X sur une composante connexe C (resp. C_0) ouverte de $X' \times_S X$, et on a $C = C_0$ par ce qui précède. Mais alors

$$f'' = (q|_C)^{-1} = g''$$

et on a la proposition. $\square$

2.2 Quotients de schémas

Définition 10 Soient X un schéma, G un groupe fini agissant à droite par automorphismes sur X .

Si $x \in X$, on appelle groupe de décomposition de x et on note $G_d(x)$ le stabilisateur de x . $G_d(x)$ opère à gauche sur $k(x)$, on appelle groupe d'inertie de x et on note $G_i(x)$ le sous-groupe de $G_d(x)$ formé des éléments agissant trivialement sur $k(x)$.

On dit que G opère de façon admissible si la condition suivante est vérifiée : il existe un morphisme $p : X \rightarrow Y$ tel que

$$(E) \quad p \text{ est affine invariant et } \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} p_*(\mathcal{O}_X)^G.$$

Dans la suite de cette section X est un schéma sur lequel agit (à droite) un groupe fini G , par automorphismes.

Proposition 13 Si $p : X \rightarrow Y$ est un morphisme vérifiant (E), alors

- (i) p est un morphisme entier.
- (ii) p est surjectif, ses fibres sont les orbites de G et la topologie de Y est quotient de celle de X .
- (iii) Si $x \in X$, $y = p(x)$, alors $k(x)$ est une extension algébrique normale de $k(y)$ et l'application canonique $G_d(x) \rightarrow \text{Aut}_{k(y)}(k(x))$ est surjective.
- (iv) (Y, p) est un quotient de X par G .

De plus si $X = \text{Spec}(A)$ est affine, $p : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A^G)$ vérifie (E).

Preuve : Supposons d'abord $X = \text{Spec}(A)$ affine et posons $B = A^G$ (G agit à droite sur X donc à gauche sur A). Soit $p : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ induit par l'inclusion. p est entier car $B \hookrightarrow A$ l'est. On renvoie à [Bou] Chap. V §1 th. 1 et §2 th. 2, pour le fait que p est surjectif, l'assertion sur les orbites et pour (iii). p est alors un quotient topologique de X , car p est fermée par le théorème de Cohen-Seidenberg.

L'isomorphisme canonique, si S est une partie multiplicativement stable de B ,

$$S^{-1}(A^G) \longrightarrow (S^{-1}A)^G,$$

assure que p vérifie (E). De plus l'isomorphisme précédent et le point (ii) entraîne le point (iv). On a donc le cas affine.

Soit maintenant p un morphisme quelconque vérifiant (E). Comme p est affine, pour les points (i), (ii) et (iii) on est ramené au cas affine : si $\text{Spec}(B)$ est un ouvert affine de Y et $\text{Spec}(A)$ sa préimage par p , la restriction

$$p|_{\text{Spec}(A)} : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$$

vérifie (E), donc à isomorphisme près on a $B = A^G$ et p est le morphisme induit par l'inclusion $B \subseteq A$.

Le point (iv) découle alors de (ii) et de l'isomorphisme $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} p_*(\mathcal{O}_X)^G$.
□

Remarque 6 Ainsi, si G opère de façon admissible, le quotient de X par G existe. De plus si $p : X \rightarrow Y$ vérifie (E), alors pour tout sous-schéma ouvert V de Y , $p^{-1}(V) \rightarrow V$ vérifie (E) et est un quotient de $p^{-1}(V)$ par G .

Proposition 14 Supposons que X est un Z -schéma et que G agit par Z -automorphismes (donc Y est un Z -schéma). Alors X est affine (resp. séparé) sur Z ssi Y l'est. Si X est de type fini sur Z , il est fini sur Y . Si de plus Z est localement noethérien, Y est de type fini sur Z .

Preuve : Voir [SGA1] V 1.5. □

Proposition 15 Le groupe G opère de façon admissible ssi X est réunion d'ouverts affines invariants par G .

En particulier, si X est affine sur un schéma Z et si les opérations de G sont des Z -automorphismes, G opère de façon admissible.

Preuve : Voir [SGA1] V 1.8. $\square$

Proposition 16 *Supposons que G opère de façon admissible sur X , et que $Y = X/G$ soit un schéma sur Z . Soit $Z' \rightarrow Z$ un changement de base et notons $X' = X \times_Z Z'$, $Y' = Y \times_Z Z'$. G opère naturellement sur X' et si $p : X \rightarrow Y$ est le morphisme naturel, p' est affine invariant sous l'action de G . Si $Z' \rightarrow Z$ est plat, alors p' satisfait la condition (E). En particulier G opère de façon admissible sur X' et $(X'/G) \times_Z Z' = (X \times_Z Z')/G$.*

Preuve : On peut supposer que $Z = Y$ et qu'on fait un changement de base plat $Y' \rightarrow Y$. Montrons que p' satisfait (E). Pour cela on peut supposer $Y = \text{Spec}(B)$ et $Y' = \text{Spec}(B')$ affines ce qui entraîne que $X = \text{Spec}(A)$ est affine et $p = \text{Spec}(i)$ avec i injective telle que $i(B) = A^G$.

Soit $\beta : B' \rightarrow A \otimes_B B'$. Est-ce que β est injective et identifie B' à $(A \otimes_B B')^G$? Oui, car la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i} & A & \longrightarrow & A^{(G)} \\ & & & & & & x \longmapsto (g.x - x)_{g \in G} \end{array}$$

de B -modules donne la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\beta} & A \otimes_B B' & \longrightarrow & (A \otimes_B B')^{(G)} \\ & & & & & & a \otimes b' \longmapsto (g.(a \otimes b') - a \otimes b')_{g \in G} \end{array}$$

après tensorisation. $\square$

Proposition 17 *On suppose que $p : X \rightarrow Y$ vérifie (E) et que Y est un Z -schéma. Soit $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow Z$ un morphisme avec Ω un corps algébriquement clos. Alors G opère sur $X(\Omega)$, l'application naturelle $X(\Omega) \rightarrow Y(\Omega)$ est surjective, et identifie $Y(\Omega)$ au quotient de $X(\Omega)$ par G . De plus, si x est la localité de $a \in X(\Omega)$, alors le stabilisateur de a est $G_i(x)$.*

Preuve : Il est clair que l'application $X(\Omega) \rightarrow Y(\Omega), u \mapsto p \circ u$ est G -invariante. Montrons la surjectivité : soit $b \in Y(\Omega)$, alors b correspond à un point $y \in Y$ et à un morphisme de $k(z)$ -algèbres $k(y) \xrightarrow{v} \Omega$, où $z \in Z$ est donné par la flèche $\text{Spec}(\Omega) \rightarrow Z$.

Le morphisme p est surjectif, soit donc $x \in X$ un antécédent de y . Par le

point (iii) de la proposition 13, l'extension $k(y) \rightarrow k(x)$ est algébrique, ainsi la flèche v se prolonge en un $k(z)$ -morphisme $k(x) \rightarrow \Omega$. Le point $a \in X(\Omega)$ correspondant s'envoie alors sur b .

Vérifions maintenant que la fibre au-dessus de b est l'orbite de a sous l'action de G . On a déjà vu que la fibre est G -stable, prenons donc a' dans la fibre, et notons $u : k(x) \rightarrow \Omega$ et $u' : k(x') \rightarrow \Omega$ les morphismes correspondants à a et a' . L'égalité $y := p(x) = p(x')$ entraîne, par le point (ii) de la proposition 13, qu'il existe $g \in G$ tel que $x' = x.g$. Ainsi a' et $a.g$ coïncident sur les points, mais pas sur les comorphismes à priori.

On a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} & k(x) & \\ p_x \nearrow & & \searrow u \\ k(y) & & \Omega \\ p_{x'} \searrow & & \nearrow u' \\ & k(x') & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & k(x) & \\ p_x \nearrow & & \nearrow g_x \\ k(y) & & k(x') \\ p_{x'} \searrow & & \end{array}$$

Le fait que l'extension $k(x)/k(y)$ soit algébrique et que l'extension $k(x')/k(y)$ soit normale entraîne que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u')$. Si donc $\gamma := u^{-1} \circ u' \circ g_x$, on vérifie que γ est un isomorphisme de $k(y)$ -algèbres. Donc par le point (iii) de la proposition déjà mentionnée, il existe $g' \in G_d(x)$ tel que $g'_x = \gamma$, et on vérifie alors que

$$a' = a.(g'.g)$$

ce qui démontre l'assertion sur les fibres et montre que $Y(\Omega) = X(\Omega)/G$.

Enfin, si $g \in G$, on a

$$\begin{aligned} a = a.g &\Leftrightarrow x.g = x \text{ et } g_x = \text{Id}_{k(x)} \\ &\Leftrightarrow g \in G_i(x) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 3 *On suppose que $p : X \rightarrow Y$ vérifie (E) et que Y est un Z -schéma. Soient $Z' \rightarrow Z$ un changement de base, $X' = X \times_Z Z'$, $x' \in X'$ et x son image dans X . Alors $G_i(x') = G_i(x)$.*

Preuve : Soient z' l'image de x' dans Z' et Ω une extension algébriquement close de $k(z')$ telle que

$$\text{tr deg}_{k(z')}(\Omega) \geq \text{tr deg}_{k(z')}(k(x')).$$

Il existe donc $a' \in X'(\Omega)$ de localité x' . L'image a de a' par la bijection G -invariante $X'(\Omega) \xrightarrow{\sim} X(\Omega)$ a alors pour localité x . On a alors $G_i(x') = \text{Stab}(a') = \text{Stab}(a) = G_i(x)$ par la proposition 17. $\square$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que $X \rightarrow X/G$ soit étale :

Théorème 2 *On suppose que $p : X \rightarrow Y$ vérifie (E), que Y est localement noethérien et X fini sur Y . Soit H un sous-groupe de G , notons $X' = X/H$. Soit $x \in X$, x' son image dans X' et y son image dans Y .*

Alors

- (i) *Si $H \supseteq G_d(x)$ et l'extension $k(x)/k(y)$ est triviale, X' est étale sur Y en x' .*
- (ii) *Si $H \supseteq G_i(x)$, X' est étale sur Y en x' .*

Preuve : Soit $Y_1 = \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}})$, on fait le changement de base $Y_1 \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Y$. Y est localement noethérien donc $\mathcal{O}_{Y,y}$ est noethérien et $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ est (fidèlement) plat. D'autre part $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Y$ est plat, le localisé d'un anneau étant plat. Ainsi $Y_1 \rightarrow Y$ est plat et par la proposition 16, $X_1 = X \times_Y Y_1 \rightarrow Y_1$ est un quotient de X_1 par G .

Il existe un unique point y_1 au-dessus de y , en effet la flèche naturelle $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \rightarrow Y$ induit une bijection

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \simeq \{\text{généralisations de } y\}$$

et envoie $\mathfrak{M}_y$ sur y , puis le fait que $\widehat{\mathfrak{M}_y} = \mathfrak{M}_y \widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ assure que $y_1 = \widehat{\mathfrak{M}_y}$ est l'unique point de $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ au-dessus de y .

On a $k(y_1) = k(y)$ donc la fibre de X en y est isomorphe à la fibre de X_1 en y_1 . Soit donc x_1 l'unique point de X_1 au-dessus de x . Soit également $X'_1 = X' \times_Y Y_1$ ($= X_1/H$ par la proposition 16), x'_1 l'image de x_1 . Le point x'_1 est au-dessus de x' . La situation est donc la suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \xrightarrow{\quad} X' = X/H \\
 & \searrow p & \swarrow g \\
 X_1 & \xrightarrow{\quad} X'_1 = X_1/H & \\
 \searrow p_1 & \swarrow g_1 & \\
 & Y_1 = X_1/G & \xrightarrow{\text{plat}} Y = X/G
 \end{array}$$

et on est ainsi ramené par le lemme 4 à montrer que g_1 est étale en x'_1 (car Y est localement noethérien et $X' \rightarrow Y$ est de type fini par la proposition 14, donc est localement de présentation finie).

L'isomorphisme entre les fibres $(X_1)_{y_1}$ et X_y implique que l'application induite $p_1^{-1}(y_1) \rightarrow p^{-1}(y)$ par la première projection $X_1 = X \times_Y Y_1 \rightarrow X$ est une bijection, c'est de plus un G -morphisme (les fibres sont bien G -stables). On en déduit que $G_d(x_1) = G_d(x)$.

Y_1 est noethérien et $\widehat{g_1}$ est de type fini donc par la proposition 11 il suffit de montrer que $\widehat{\mathcal{O}_{Y_1, y_1}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{X'_1, x'_1}}$ est un iso (on a encore $k(y_1) = k(x_1)$ par le lemme 6).

Pour simplifier les notations, posons $B = \widehat{\mathcal{O}_{Y, y}}$, donc $Y_1 = \text{Spec}(B)$ et $X_1 = \text{Spec}(A) \rightarrow Y_1$ est le morphisme induit par l'inclusion $B = A^G \subseteq A$, enfin $X'_1 = \text{Spec}(A^H)$. A est un B -module de type fini donc est semi-local (i.e. possède un nombre fini d'idéaux maximaux) et ses idéaux maximaux sont les premiers au-dessus de $\mathfrak{M}_B = y_1$. Notons $\text{Max}(A) = \{\underbrace{\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r}_{x_1}\}$,

$A_i = A_{\mathfrak{M}_i}$.

On a $\begin{cases} B \text{ local complet donc hensélien} \\ A \text{ fini comme } B\text{-module} \end{cases}$ donc (cf [Ray]) A est décomposée et la flèche $A \rightarrow \prod_i A_i$ est un iso. L'isomorphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \prod_i A_i &\longrightarrow \text{Hom}_{G_d}(G, A_1) \\ (a_i)_i &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & A_1 \\ \sigma & \mapsto & \sigma.a_i \text{ si } x_1.\sigma = x_i \end{array} \right) \end{aligned}$$

donne un iso

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_{G_d}(G, A_1) \\ a &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & A_1 \\ \sigma & \mapsto & \frac{\sigma.a}{1} \end{array} \right). \end{aligned}$$

G agit sur le membre de droite par $\sigma'.f(t) = f(t.\sigma')$.

Ainsi le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \text{Hom}_{G_d}(G, A_1) & \xrightarrow{ev_1} & A_1 \\ & & f & \longmapsto & f(1_G) \end{array},$$

qui n'est rien d'autre que la localisation $A \rightarrow A_1$, induit un iso

$$A^G = B \xrightarrow{\sim} A_1^{G_d}.$$

Maintenant on remplace (x'_1 est un idéal premier de A^H)

- - A par $A_{x'_1}$
- - G par H
- - B par $(A^H)_{x'_1}$
- - $G_d(x_1)$ par $G_d(x_1) \cap H$.

Comme précédemment on obtient un iso canonique

$$(A^H)_{x'_1} \xrightarrow{\sim} A_1^{G_d \cap H}.$$

Donc on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B = A^G & \longrightarrow & (A^H)_{x'_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_1^{G_d(x_1)} & \xrightarrow{\text{inclusion}} & A_1^{G_d(x_1) \cap H} \end{array}$$

et le morphisme $\mathcal{O}_{Y_1, y_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1, x'_1}$ n'est rien d'autre que l'inclusion $A_1^{G_d(x_1)} \subseteq A_1^{G_d(x_1) \cap H}$. Mais on a supposé que $G_d(x'_1) = G_d(x_1) \subseteq H$, donc $\mathcal{O}_{Y_1, y_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1, x'_1}$ est un iso et a fortiori induit un iso sur les complétés. Cela conclut la démonstration de (i).

Pour démontrer (ii), on fait le même changement de base $Y_1 \rightarrow Y$ qu'au-dessus, puis on fait un changement de base plat convenable $Y_2 \rightarrow Y_1$ afin que l'extension $k(x_2)/k(y_2)$ soit triviale, avec des notations évidentes.

Pour cela, considérons l'extension $k(x_1)/k(y_1)$ et l'anneau local noethérien $B = \widehat{\mathcal{O}_{Y, y}}$. Par [EGA3] 0.10.3.1 il existe un homomorphisme local plat de B dans un anneau local noethérien $(C, \mathfrak{N})$ tel que $k(C)$ soit $k(y_1)$ -isomorphe à $k(x_1)$. On pose alors $Y_2 = \text{Spec}(C)$ et $y_2 = \mathfrak{N}$.

On a un morphisme $\text{Spec}(k(x_1)) \rightarrow X_2$ donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec}(k(x_1)) & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & X_2 = X_1 \times_{Y_1} Y_2 & \longrightarrow & X_1 \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & Y_2 & \longrightarrow & Y_1 \end{array}$$

ce qui définit un point $x_2 \in X_2$ au-dessus de x_1 . L'image x'_2 de x_2 dans X'_2 est au-dessus de x'_1 . Alors le composé $k(y_2) \hookrightarrow k(x_2) \hookrightarrow k(x_1)$ est un iso, donc

$$k(x_2) = k(y_2).$$

Le changement de base ne change pas l'inertie par le corollaire 3 : $G_i(x_2) = G_i(x)$. Mais comme $k(x_2) = k(y_2)$ on a $G_i(x_2) = G_d(x_2)$, donc (i) s'applique. $\square$

Corollaire 4 *Soit X étale fini sur un schéma localement noethérien Z , G un groupe fini opérant sur X par Z -automorphismes. Alors G opère de façon admissible et le schéma quotient X/G est étale fini sur Z .*

Preuve : G opère de façon admissible par la proposition 15. Montrons d'abord que $p : X \rightarrow X/G$ est étale. Pour cela on fait plusieurs réductions.

On peut d'abord supposer que Z est noethérien (remarque 6). On peut ensuite se ramener au cas où G agit transitivement sur les composantes connexes de X : il y a en a un nombre fini puisque X est noethérien (car fini sur Z) et possède donc un nombre fini de composantes irréductibles. Ainsi les composantes connexes de X sont ouvertes, et si on note ω_i les orbites de l'ensemble des composantes connexes et $X_i = \cup_{C \in \omega_i} C$ on obtient une partition $X = \sqcup X_i$ de X en ouverts stables par G . On a alors un recouvrement ouvert de $Y = X/G$ par les $p(X_i)$, et on est ramené à nouveau par la remarque 6 à montrer que les $X_i \rightarrow X_i/G$ sont étales.

On se ramène maintenant au cas où X est connexe. Notons $C_1, \dots, C_r$ les composantes connexes de X , $\alpha_i : C_i \hookrightarrow X$ les injections, H_i le stabilisateur de C_i , et pour $i = 1, \dots, r$ soit $g_i \in G$ tel que $C_i \cdot g_i = C_1$ (on prend $g_1 = e$). Alors si le corollaire est démontré sous l'hypothèse supplémentaire que X est connexe, le morphisme quotient $p_1 : C_1 \rightarrow C_1/H_1$ est étale. Montrons que cela implique le résultat pour X . Pour cela, soit $p : X \rightarrow C_1/H_1$ définie par $p \circ \alpha_i = p_1 \circ g_i|_{C_i}$ pour tout i , et montrons que p est un quotient de X par G (p est étale car p_1 l'est et les $g_i|_{C_i}$ sont des iso).

D'abord p est G -invariante : si $g \in G$, on a si $C_i \cdot g = C_{i_g}$,

$$\begin{aligned} g \cdot p = p &\Leftrightarrow \forall i, g \cdot p \circ \alpha_i = p \circ \alpha_i \\ &\Leftrightarrow \forall i, p_1 \circ g_{i_g}|_{C_{i_g}} \circ g|_{C_i} = p_1 \circ g_i|_{C_i} \\ &\Leftrightarrow \forall i, \underbrace{g_i^{-1} g g_{i_g}}_{\in H_1} \cdot p_1 = p_1. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(C_1/H_1, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(X, Z)^G \\ u & \longmapsto & u \circ p \end{array}$$

est une bijection pour tout Z . L'injectivité découle du fait que p_1 est un épi. Pour la surjectivité, si $v \in \text{Hom}(X, Z)^G$ alors on a $v \circ \alpha_1 \in \text{Hom}(C_1, Z)^{H_1}$ donc il existe $u \in \text{Hom}(C_1/H_1, Z)$ tel que $v \circ \alpha_1 = u \circ p_1$. Alors pour tout i on a

$$(u \circ p) \circ \alpha_i = u \circ p_1 \circ g_i|_{C_i} = (g_i.v) \circ \alpha_i = v \circ \alpha_i$$

donc $u \circ p = v$.

On est donc ramené au cas où X est connexe.

Enfin on peut supposer que G opère fidèlement : si G opère via $G \xrightarrow{\lambda} \text{Aut}(X)$ on a $X/G = X/(G/\text{Ker}(\lambda))$.

Sous ces hypothèses (G opère fidèlement sur X connexe), les groupes d'inertie des points de X sont réduits à l'élément neutre. En effet soit $x \in X$ et $g \in G_i(x)$. Alors par la proposition 12, g opère trivialement sur X et ainsi $g = e$.

Le théorème 2 s'applique donc et $p : X \rightarrow X/G$ est étale. Or p est surjective (proposition 13), donc par le lemme 5 $X/G \rightarrow Z$ est étale.

Enfin par la proposition 14, $X/G \rightarrow Z$ est affine, et fini car si $\text{Spec}(B) \subseteq Z$ est un ouvert affine de préimage $\text{Spec}(A)$ dans X et $\text{Spec}(C)$ dans X/G , on sait que $C = A^G$ par la proposition 13. A est un B -module de type fini, B est noethérien donc le sous- B -module $C = A^G$ est de type fini. $\square$

2.3 La catégorie des revêtements étales

Remarque 7 *On utilisera souvent dans la suite le fait suivant : si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de S -schémas étales finis, f est également étale fini (en fait g fini non ramifié suffit, voir par exemple [EGA4] 17.3.4). En particulier f est ouvert et fermé.*

Théorème 3 *Soit S un schéma localement noethérien et connexe. Alors la catégorie $\mathcal{C}$ des revêtements étales de S est une catégorie galoisienne, et si on fixe un point géométrique $\bar{a} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ à valeurs dans un corps algébriquement clos Ω , le foncteur F*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ X \xrightarrow{f} S & \longmapsto & \underbrace{|X \times_S \Omega|}_{\text{ensemble sous-jacent}} \end{array}$$

est un foncteur fibre pour $\mathcal{C}$.

Définition 11 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on note $\pi_1(S, \bar{a})$ un groupe profini (unique à isomorphisme près par la proposition 10) tel que F factorise en une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \text{Ens}f. \\ & \searrow & \nearrow \text{For} \\ & \mathcal{C}(\pi_1(S, \bar{a})) & \end{array}$$

Preuve : Vérifions d'abord que $\mathcal{C}$ est essentiellement petite. En fait on va montrer la catégorie des schémas de type fini au-dessus d'un schéma fixé S est essentiellement petite. On fixe d'abord un recouvrement ouvert affine $(S_s)_{s \in S}$ de S et des isos $\beta_s : S_s \rightarrow \text{Spec}(A_s)$.

Alors si $X \xrightarrow{f} S$ est de type fini, pour tout s il existe un ensemble fini I_s et un recouvrement ouvert affine $(X_{s,i})_{i \in I_s}$ de $f^{-1}(S_s)$. On fixe des isos $X_{s,i} \xrightarrow{\alpha_{s,i}} \text{Spec}(B_{s,i})$ tels que $B_{s,i}$ est de la forme

$$B_{s,i} = A_s[T_1, \dots, T_{r_{s,i}}]/J_{s,i}$$

et les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_{s,i} & \xrightarrow{\alpha_{s,i}} & \text{Spec}(B_{s,i}) \\ f| \downarrow & & \downarrow \\ S_s & \xrightarrow{\beta_s} & \text{Spec}(A_s) \end{array}$$

commutent. On a alors des données de recollement sur les $\text{Spec}(B_{s,i})$ provenant de X , et X est S -isomorphe au schéma obtenu par recollement des $\text{Spec}(B_{s,i})$.

Ainsi si on a les données suivantes :

- - pour tout $s \in S$, un ens fini I_s
- - pour tout (s, i) (avec $i \in I_s$) un entier $r_{s,i}$ et un idéal $J_{s,i}$ de

$$B_{s,i} = A_s[T_1, \dots, T_{r_{s,i}}]/J_{s,i}$$

(on fixe une fois pour toute des algèbres de polynômes A_s , $A_s[T_1]$, $A_s[T_1, T_2], \dots$)

- - des données de recollement : des ouverts $U_{s,i,s',i'} \subseteq X_{s,i}$ et des S -isos $f_{s,i,s',i'} : U_{s,i,s',i'} \rightarrow U_{s',i',s,i}$ vérifiant les conditions habituelles, et tel que si $h : Y \rightarrow S$ est le recollé, alors

$$h^{-1}(S_s) = \bigcup_{i \in I_s} \text{Spec}(B_{s,i}),$$

on obtient un S -schéma de type fini, et on a vu que tout schéma de type fini sur S s'obtient à partir de telles données. Or on vérifie que la collection des données du type décrit est un ensemble.

Il s'agit maintenant de vérifier les axiomes (G1) à (G6) de la définition 6. Notons F le foncteur défini dans l'énoncé.

On commence par (G1) et (G4). Il existe un objet final dans $\mathcal{C}$, c'est $S \xrightarrow{Id} S$, et les produits fibrés existent : si $Z \in \mathcal{C}$ et X, Y sont des Z -objets, alors $X \times_Z Y \rightarrow S$ est un produit fibré de X par Y au-dessus de Z . En effet c'est un revêtement étale puisque les propriétés pour un morphisme d'être fini, étale sont stables par changement de base et par composition, et donc par produit fibré, et la propriété universelle requise est bien vérifiée. Donc (G1) est vérifié.

Pour (G4), il est clair que F commute aux objets terminaux. Si X, Y et Z sont comme au-dessus, on a $(X \times_Z Y) \times_S \Omega = (X \times_S \Omega) \times_{Z \times_S \Omega} (Y \times_S \Omega)$ (le foncteur de changement de base $(Sch/S) \rightarrow (Sch/Spec(\Omega))$ admet un adjoint à gauche, la composition par $Spec(\Omega) \rightarrow S$, donc en particulier commute aux produit fibrés). D'autre part on a des identifications canoniques $T'(\Omega) = |T'|$ si $T \in \mathcal{C}$ et $T' = T \times_S \Omega$. Ainsi

$$|(X \times_Z Y)'| = (X \times_Z Y)'(\Omega) = X'(\Omega) \times_{Z'(\Omega)} Y'(\Omega) = |X'| \times_{|Z'|} |Y'|$$

et F commute aux produits fibrés.

Les assertions dans (G2) et (G5) relatives aux sommes directes finies sont claires : si $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}$, une somme directe des X_i est $\coprod X_i \rightarrow S$ et le fait que $(\coprod X_i) \times \Omega = \coprod (X_i \times \Omega)$ assure que F commute aux sommes finies.

Concernant l'assertion sur les quotients, si un groupe fini G agit sur $X \in \mathcal{C}$ par S -automorphismes, le corollaire 4 montre qu'il existe un quotient $p : X \rightarrow X/G$ de X par G dans la catégorie des schémas, qui est étale fini. On vérifie que p est également un quotient dans la catégorie des S -schémas, et donc dans $\mathcal{C}$. Donc on a (G2).

Le fait que F commute aux quotients vient de la proposition 17 : on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(Y) \\ G\text{-iso} \downarrow & & \downarrow G\text{-iso} \\ X(\Omega) & \longrightarrow & Y(\Omega). \end{array}$$

Il reste à vérifier l'assertion sur les épi stricts dans (G5). Si $f : X \rightarrow X'$ est un épi strict dans $\mathcal{C}$, f est surjective. En effet sinon comme f est ou-

verte et fermée on écrit $X' = f(X) \sqcup U$, U un ouvert de X' . Alors soit $u : f(X) \sqcup U \rightarrow f(X) \sqcup U \sqcup U$ (resp. $v : f(X) \sqcup U \rightarrow f(X) \sqcup U \sqcup U$) envoyant $f(X)$ sur lui-même identiquement et envoyant U identiquement sur la première (resp. la deuxième) copie de U dans $f(X) \sqcup U \sqcup U$. On a $u \circ p = v \circ p$, ce qui contredit le fait que f est un épi.

La propriété de surjectivité étant conservée par changement de base, $F(f) = f \times_S Id_\Omega : F(X) \rightarrow F(X')$ est surjective, cela termine la vérification de (G5).

Concernant (G3), si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, f est ouvert et fermé donc se factorise en $X \xrightarrow{f'} X'' \xrightarrow{f''} X'$, où f'' est l'immersion ouverte et fermée de $f(X)$ dans X' . Le morphisme f' , qui est étale et fini est un épi strict (par [SGA1] VIII 5.3).

Enfin pour (G6), supposons que $f : X \rightarrow X'$ soit tel que $F(f)$ soit un iso, et montrons que f lui-même est un iso. Notons $X \xrightarrow{h} S$, $X' \xrightarrow{g} S$ les morphismes structuraux. Par le lemme 7, et comme S est connexe, il existe $r', r'' \geq 0$ tels que $\text{rang}_{\mathcal{O}_{S,s}}((g_* \mathcal{O}_{X'})_s) = r'$ et $\text{rang}_{\mathcal{O}_{S,s}}((h_* \mathcal{O}_X)_s) = r''$ pour tout $s \in S$.

Si $s \in S$ est la localité de $\bar{a}$, nous allons justifier que :

$$\begin{aligned} r'' &= \text{rang}_{\mathcal{O}_{S,s}}((h_* \mathcal{O}_X)_s) \\ &= \dim_{k(s)}(\mathcal{O}_{X_s}(X_s)) \\ &= \dim_\Omega(\mathcal{O}_{X_s}(X_s) \otimes_{k(s)} \Omega) \\ &= |F(X)|. \end{aligned}$$

En effet pour la deuxième égalité on prend $\text{Spec}(A) \subseteq S$ un ouvert affine de S contenant s et $\text{Spec}(B)$ sa préimage tels que B soit un A -module libre de rang r'' . Alors $X_s = \text{Spec}(C)$ avec $C = B \otimes_A k(s)$, et en tant que $k(s)$ -espace vectoriel, on a $C \simeq A^r \otimes_A k(s) = k(s)^{r''}$.

Pour la quatrième égalité on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} F(X) = X \times_S \Omega & \longrightarrow & X_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\Omega) & \longrightarrow & \text{Spec}(k(s)) & \longrightarrow & S \end{array}$$

donc $F(X) = \text{Spec}(\underbrace{C \otimes_{k(s)} \Omega}_D)$. Or on sait que D est un produit fini d'ex-

tensions k_i finies séparables de Ω puisque $F(X) \rightarrow \text{Spec}(\Omega)$ est étale. On a $k_i = \Omega$ pour tout i donc $F(X) = \coprod \text{Spec}(k_i)$ vérifie $|F(X)| = \dim_\Omega(D)$.

De la même façon on a $r' = |F(X')|$. Mais $F(f)$ est une bijection donc $r' = r''$. Si $r'' = 0$, $X = X' = \emptyset$ et c'est fini. Sinon pour tout $x \in X$ on a $r'' = \text{rang}_{\mathcal{O}_{X',f(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}) \cdot r'$ d'où $\text{rang}_{\mathcal{O}_{X',f(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$. Pour montrer que f est un iso, on peut supposer X' connexe. Alors f est surjective et $\text{rang}_{\mathcal{O}_{X',f(x)}}(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$ implique f injective par ce qui précède. Or f est ouverte, donc est un homéomorphisme.

Il reste à vérifier que $f^\#$ est un iso, et cela découle du fait suivant : si un morphisme d'anneaux fini injectif $A \rightarrow B$ est tel que B est engendré par un de ses éléments b sur A , il est surjectif. Il suffit de vérifier que $b \in A$. Mais b est entier sur A donc il existe un polynôme unitaire $P = T^n + \sum a_i T^i \in A[T]$ annulant b . Si $a \in A$ est tel que $ab = 1$ on a alors $b = -\sum a_i a^{n-1-i} \in A$. (G6) est donc vérifiée. $\square$

3 Théorèmes GAGA et groupe fondamental

On s'intéresse dans cette partie au groupe fondamental de schémas sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, le but est de calculer le groupe fondamental d'une courbe projective lisse (connexe) sur $\mathbb{C}$.

Pour cela, on commence par associer de manière fonctorielle un espace analytique à tout schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Les théorèmes GAGA de Serre donnent alors l'équivalence de la théorie des faisceaux cohérents sur l'analytifié et sur le schéma de départ. Une esquisse de preuve des théorèmes est donnée dans la deuxième section.

Dans la dernière section on utilise l'analytification pour calculer le groupe fondamental de certaines courbes.

3.1 Espace analytique associé à un $\mathbb{C}$ -schéma

On considère la catégorie An des espaces analytiques au sens de [Car]. Un sous-espace annelé Y d'un espace annelé X est dit de présentation finie si l'idéal le définissant dans $X \setminus (\bar{Y} \setminus Y)$ est de type fini. Ainsi :

Définition 12 *Un espace analytique (sur $\mathbb{C}$) est un espace annelé en $\mathbb{C}$ -algèbres tel que pour tout point il existe un voisinage ouvert isomorphe pour la structure induite à un sous-espace annelé de présentation finie d'un des espaces affines $\mathcal{E}^n$, où $\mathcal{E}^n$ est l'espace topologique $\mathbb{C}^n$ muni du faisceau des fonctions analytiques.*

Un morphisme d'espaces analytiques est un morphisme d'espaces annelés en $\mathbb{C}$ -algèbres.

Par exemple, une surface de Riemann munie du faisceau des fonctions holomorphes est un espace analytique.

Remarque 8 *Si X est un espace analytique, $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre locale de corps résiduel égal à $\mathbb{C}$ pour tout x , car l'anneau local en un point de $\mathcal{E}^n$ est l'anneau des séries convergentes en n variables $\mathbb{C}\{t_1, \dots, t_n\}$, qui est de corps résiduel $\mathbb{C}$. Il en résulte que les morphismes d'espaces analytiques sont des morphismes d'espaces localement annelés.*

Théorème 4 *Soit X un $\mathbb{C}$ -schéma localement de type fini. Alors le foncteur contravariant*

$$\begin{aligned} An &\longrightarrow Ens \\ \mathcal{X} &\longmapsto Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X) \end{aligned}$$

est représentable, où $Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X)$ désigne l'ensemble des morphismes d'espaces localement annelés en $\mathbb{C}$ -algèbres de $\mathcal{X}$ dans X . Si (X^{an}, φ) est un

représentant, φ induit une bijection de $|X^{an}|$ sur $X(\mathbb{C})$. De plus pour tout $x \in X^{an}$ le morphisme $\varphi_x : \mathcal{O}_{X, \varphi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{an}, x}$ induit un isomorphisme sur les complétés. En particulier φ est plat.

Définition 13 Avec les notations du théorème précédent, on dit que X^{an} est l'espace analytique associé à X .

Preuve : On procède en plusieurs étapes.

(i) Si le théorème est vrai pour un schéma Y , il est vrai pour tout sous-schéma de Y .

En effet, si tout d'abord X est un sous-schéma ouvert de Y et si (Y^{an}, ψ) est un analytifié de Y , $X^{an} := \psi^{-1}(X)$ muni de la restriction φ de ψ est l'espace analytique associé à X , puisque $X^{an} = Y^{an} \times_Y X$. L'assertion sur les φ_x est claire. L'application ψ induit une bijection de Y^{an} sur l'ensemble des points fermés de Y , donc $\varphi = \psi|_{\psi^{-1}(X)}$ induit une bijection de $\psi^{-1}(X)$ sur l'ensemble des points fermés de X , un point y de Y étant fermé ssi $k(y) = \mathbb{C}$.

Si X est un sous-schéma fermé de Y défini par un faisceau d'idéaux (cohérent) $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Y$, on note $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}}$ l'image du morphisme naturel $\psi^* \mathcal{I} \rightarrow \psi^* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{Y^{an}}$. C'est un idéal cohérent (i.e. de type fini puisque $\mathcal{O}_{Y^{an}}$ est lui-même cohérent, voir [Car]) de $\mathcal{O}_{Y^{an}}$, et on a si $y \in Y^{an}$,

$$(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}})_y \simeq \mathcal{I}_{\psi(y)} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}, y}$$

comme $\mathcal{O}_{Y^{an}, y}$ -modules.

Soit X^{an} le sous-espace analytique fermé de Y^{an} défini par $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}}$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y^{an} & \xrightarrow{\psi} & Y \\ j \uparrow & & \uparrow i \\ X^{an} & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

où φ est induit par ψ (on a $\psi^{-1}(X) = X^{an}$ par platitude de ψ).

On a, fonctoriellement en $\mathcal{X} \in An$,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X) &\cong \left\{ f \in Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, Y); \left\{ \begin{array}{l} f(\mathcal{X}) \subseteq X \\ \forall x \in \mathcal{X}, Ker(i_{f(x)}) \subseteq Ker(f_x) \end{array} \right\} \right\} \\ &\cong \left\{ h \in Hom_{An}(\mathcal{X}, Y^{an}); \left\{ \begin{array}{l} (\psi \circ h)(\mathcal{X}) \subseteq X \\ \forall x \in \mathcal{X}, Ker(i_{\psi(h(x))}) \subseteq Ker(h_x \circ \psi_{h(x)}) \end{array} \right\} \right\} \\ &\cong \left\{ h \in Hom_{An}(\mathcal{X}, Y^{an}); \left\{ \begin{array}{l} h(\mathcal{X}) \subseteq X^{an} \\ \forall x \in \mathcal{X}, Ker(j_{h(x)}) \subseteq Ker(h_x) \end{array} \right\} \right\} \\ &\cong Hom_{An}(\mathcal{X}, X^{an}). \end{aligned}$$

La première et la dernière bijection proviennent de la propriété universelle des sous-espaces fermés d'un espace annelé, la deuxième bijection provient du fait que Y^{an} est l'analytifié de Y , et la troisième bijection du fait que

$$\begin{aligned} \underbrace{Ker(i_{\psi(h(x))})}_{\mathcal{I}_{\psi(h(x))}} &\subseteq \underbrace{Ker(h_x \circ \psi_{h(x)})}_{\psi_{h(x)}^{-1}(Ker(h_x))} \\ \Leftrightarrow \underbrace{Ker(j_{h(x)})}_{\mathcal{I}_{\psi(h(x))} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}, h(x)}} &\subseteq Ker(h_x). \end{aligned}$$

Ainsi (X^{an}, φ) convient.

Si $x \in X^{an}$, φ_x est le morphisme

$$\mathcal{O}_{Y, \psi(x)} / \mathcal{I}_{\psi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y^{an}, x} / \mathcal{I}_{\psi(x)} \cdot \mathcal{O}_{Y^{an}, x}$$

induit par ψ_x , donc $\widehat{\varphi_x}$ est le morphisme

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y, \psi(x)} / \mathcal{I}_{\psi(x)}} \cdot \widehat{\mathcal{O}_{Y, \psi(x)}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{Y^{an}, x} / \mathcal{I}_{\psi(x)}} \cdot \widehat{\mathcal{O}_{Y^{an}, x}}$$

induit par $\widehat{\psi_x}$, qui est un iso. Donc $\widehat{\varphi_x}$ est un iso.

Enfin il est clair que φ induit une bijection entre X^{an} et $X(\mathbb{C})$. D'où (i).

(ii) Si X_1, X_2 sont deux $\mathbb{C}$ -schémas tels que $(X_1^{an}, \varphi_1), (X_2^{an}, \varphi_2)$ existent et vérifient l'assertion sur les points fermés, alors $(X_1 \times X_2)^{an}$ existe et vérifie l'assertion sur les points fermés.

Les produits finis existent dans la catégorie des espaces analytiques, soit (X^{an}, p_1, p_2) un produit de X_1^{an} et X_2^{an} . Le produit $X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2$ est un produit de X_1 et X_2 dans la catégorie des espaces localement annelés sur $\mathbb{C}$, donc si $\varphi := (\varphi_1 \circ p_1) \times (\varphi_2 \circ p_2) : X^{an} \rightarrow X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2$, on a fonctoriellement en $\mathcal{X} \in An$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2) &\cong Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X_1) \times Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X_2) \\ &\cong Hom_{An}(\mathcal{X}, X_1^{an}) \times Hom_{An}(\mathcal{X}, X_2^{an}) \\ &\cong Hom_{An}(\mathcal{X}, X^{an}) \end{aligned}$$

et (X^{an}, φ) représente le foncteur $\mathcal{X} \rightarrow Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2)$.

Pour ce qui concerne les points, le foncteur d'oubli

$$\begin{aligned} An &\longrightarrow Ens \\ \mathcal{X} &\longmapsto \text{l'ensemble } |\mathcal{X}| \text{ sous-jacent à } \mathcal{X} \end{aligned}$$

commute aux produits, donc $(|X^{an}|, |p_1|, |p_2|) = |X_1^{an} \times X_2^{an}|$. Ainsi la composée

$$\begin{array}{ccc} |X^{an}| & \xrightarrow{\text{induit par } \varphi} & (X_1 \times_{\mathbb{C}} X_2)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} X_1(\mathbb{C}) \times X_2(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(p_1(x)), \varphi_2(p_2(x))) \end{array}$$

est une bijection car φ_1 et φ_2 induisent des bijections. Donc l'assertion sur les points est vérifiée.

(iii) Le théorème est vérifié pour les espaces affines $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$.

Pour $n = 0$ c'est clair. Pour $n = 1$ on a l'isomorphisme fonctoriel en $\mathcal{X} \in An$

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, \mathbb{A}^1) &\cong Hom_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[T], \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})) \\ &\cong \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \\ &\cong Hom_{An}(\mathcal{X}, \mathcal{E}^1) \end{aligned}$$

donc $\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}^1 = Spec(\mathbb{C}[T]) \\ x & \mapsto & (T - x) \end{array} \right)$ est l'espace analytique associé à $\mathbb{A}^1$, et φ induit bien une bijection entre $\mathcal{E}^1$ et $Max(\mathbb{C}[T])$. Ainsi par le point (ii), $(\mathbb{A}^n)^{an}$ existe et est

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n = Spec(\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]) \\ (z_i)_i & \xrightarrow{\varphi} & (T_1 - z_1, \dots, T_n - z_n) \end{array}$$

et on a l'assertion sur les points.

Concernant l'assertion sur les complétés, si $z = (z_i)_i \in \mathcal{E}^n$, φ_z est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]_{(T_i - z_i)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, z} \\ \frac{P}{Q} & \longmapsto & \left\langle \{z'; Q(z') \neq 0\}, z' \mapsto \frac{P(z')}{Q(z')} \right\rangle \end{array}$$

et sur les complétés on obtient l'identité de $\mathbb{C}[[T_1, \dots, T_n]]$, ce qui démontre (iii).

(iv) Le théorème est vérifié pour tout $\mathbb{C}$ -schéma localement de type fini.

Soit X un tel schéma. Si X est affine, le théorème est vérifié par (i) et (iii). Sinon, on prend un recouvrement ouvert affine $(X_i)_i$ de X et par (i) et la propriété universelle des (X_i^{an}, φ_i) , les X_i^{an} se recollent en un espace analytique X^{an} qui s'avère être associé à X . On vérifie alors de manière immédiate

l'assertion sur les complétés et les points fermés. $\square$

Certaines propriétés portant sur un $\mathbb{C}$ -schéma localement de type fini (resp. sur un morphisme de tels schémas) passent à l'analytifié, et vice-versa. Pour les preuves des propositions suivantes on réfère à [SGA1]. Précisons les notions de morphismes étales, propres et finis dans la catégorie des espaces analytiques :

Définition 14 Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme d'espaces analytiques, et $x \in \mathcal{X}$.

On dit que f est dit étale en x si c'est un isomorphisme local en x . On dit que f est étale s'il est étale en tout les points de $\mathcal{X}$.

On dit que f est séparé si la diagonale $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ est une immersion fermée, i.e. si l'image de $\Delta_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ est un fermé de $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$.

On dit que f est fini s'il est séparé, fermé et si ses fibres sont finies.

On dit que f est propre s'il l'est au sens topologique et s'il est séparé.

Proposition 18 Soient X un $\mathbb{C}$ -schéma localement de type fini, X^{an} l'espace analytique associé, n un entier. Soit P la propriété d'être :

- (i) de dimension n
- (ii) connexe
- (iii) régulier.

Alors P est vérifiée par X ssi elle l'est par X^{an} .

Preuve : Voir [SGA1] XII prop. 2.1 et 2.4. $\square$

Proposition 19 Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$ -schémas localement de type fini, $f^{an} : X^{an} \rightarrow Y^{an}$ le morphisme induit par f sur les espaces analytiques associés. Soit P la propriété d'être :

- (i) étale
- (ii) séparé.

Alors P est vérifiée par f ssi elle l'est par f^{an} .

Si de plus f est de type fini, et P est la propriété d'être :

- (i) fini
- (ii) propre
- (iii) une immersion fermée,

alors P est vérifiée par f ssi elle l'est par f^{an} .

Preuve : Voir [SGA1] XII prop. 3.1 et 3.2. $\square$

3.2 Les théorèmes GAGA

On suit [Ser] et on y réfère pour certains résultats ou détails.

Définition 15 *Si $\mathcal{X}$ est un espace analytique, un faisceau (analytique) sur $\mathcal{X}$ est simplement un faisceau de modules pour la structure d'espace annelé de $\mathcal{X}$.*

Si X est un $\mathbb{C}$ -schéma localement de type fini, $\varphi : X^{an} \rightarrow X$ son analytification et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, on note $\mathcal{F}^{an}$ le tiré en arrière $\varphi^\mathcal{F}$ et on l'appelle l'analytifié de $\mathcal{F}$.*

Remarque 9 *Le foncteur d'analytification*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}_X\text{-modules}) & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{X^{an}}\text{-modules}) \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathcal{F}^{an} \end{array}$$

est additif, exact (car φ est plat), et envoie un module cohérent sur un module cohérent.

Théorème 5 *Soit $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ un $\mathbb{C}$ -schéma projectif. Alors pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $q \geq 0$, le morphisme naturel*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

est un isomorphisme.

Remarque 10 *On considère dans le théorème précédent la cohomologie au sens des foncteurs dérivés du foncteur des sections globales, elle coïncide avec la cohomologie de Čech, dans le cas algébrique car X est séparé ([EGA3] III 1.4.1), et dans le cas analytique car X^{an} est paracompact, et même compact (voir par exemple [Dem] 5.21).*

Preuve : On peut d'abord se ramener à montrer le théorème pour $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$. En effet X est un sous-schéma fermé d'un espace projectif $\mathbb{P}^r$, défini par un idéal cohérent $\mathcal{I}$, et on a vu dans la démonstration du théorème 4 que si $\psi : (\mathbb{P}^r)^{an} \rightarrow \mathbb{P}^r$ est l'analytifié de $\mathbb{P}^r$, l'analytifié de X est $V(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^r)^{an}})$ muni du morphisme φ faisant commuter

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^r)^{an} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^r \\ j \uparrow & & \uparrow i \\ X^{an} & \xrightarrow{\varphi} & X. \end{array}$$

Or on a des isomorphismes fonctoriels $(i_*\mathcal{F})^{an} \cong j_*(\mathcal{F}^{an})$ et

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & H^q(\mathbb{P}^r, i_*\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an}) & \xrightarrow{\sim} & H^q((\mathbb{P}^r)^{an}, j_*(\mathcal{F}^{an})) \end{array}$$

d'où la réduction à $X = \mathbb{P}^r$.

On note $\mathcal{O}$ le faisceau structural de $\mathbb{P}^r$. Le théorème est vérifié pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}$: $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O})$ et $H^0((\mathbb{P}^r)^{an}, \mathcal{O}^{an})$ sont réduits aux constantes et si $q > 0$, on a $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}) = 0$ et également $H^q((\mathbb{P}^r)^{an}, \mathcal{O}^{an}) = 0$ par un théorème de Dolbeault.

On en déduit que le théorème est vrai pour les faisceaux twistés $\mathcal{O}(n)$, en raisonnant par récurrence sur r .

Pour $r = 0$ c'est clair. Supposons donc $r \geq 1$ et le résultat démontré pour $r - 1$. On considère alors l'hyperplan E définie par l'équation $t_0 = 0$ (où $\mathbb{P}^r = Proj(\mathbb{C}[t_0, \dots, t_r])$). En notant $\mathcal{I} = (t_0)^\sim$ l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par t_0 , on a $E = V(\mathcal{I})$, ainsi E a une structure de sous-schéma fermé. Notons $j : E \rightarrow \mathbb{P}^r$ l'immersion fermée. Si on note $\mathcal{O}_E = j^*(j_*\mathcal{O})$ la restriction de $\mathcal{O}$ à E on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\times t_0} \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

et donc des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_E(n) \longrightarrow 0$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On écrit les suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} H^q(X, \mathcal{O}(n-1)) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{O}(n)) & \longrightarrow & H^q(E, \mathcal{O}_E(n)) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{O}(n-1)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^q(X^{an}, \mathcal{O}(n-1)^{an}) & \succ & H^q(X^{an}, \mathcal{O}(n)^{an}) & \succ & H^q(E^{an}, \mathcal{O}_E(n)^{an}) & \succ & H^{q+1}(X^{an}, \mathcal{O}(n-1)^{an}) \end{array}$$

et l'hypothèse de récurrence entraîne que les flèches

$$H^q(E, \mathcal{O}_E(n-1)) \rightarrow H^q(E^{an}, \mathcal{O}_E(n-1)^{an})$$

sont des iso pour tous $q \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Donc par le lemme des cinq le théorème est vrai pour $\mathcal{O}(n-1)$ ssi il l'est pour $\mathcal{O}(n)$. Or il est vrai pour $\mathcal{O}$ par ce qui précède. Donc le théorème est vrai pour les twistés $\mathcal{O}(n)$.

Enfin dans le cas général, c'est à dire pour $\mathcal{F}$ quelconque, on raisonne par récurrence descendante sur $q \geq 0$.

Si $q > 2r$, on a $H^q(X, \mathcal{F})$ et $H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$ nuls tous les deux. En fait par le théorème d'annulation de Grothendieck ([Har] III 2.7), on sait que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ dès que $q > r$, puisque X est noethérien, mais on ne peut appliquer le même théorème pour X^{an} qui n'est pas noethérien : par la preuve du théorème 4 on sait que X^{an} est construit en recollant des copies d'espaces affines $\mathcal{E}^r = \mathbb{C}^r$ qui ne sont pas noethériens. Cependant la cohomologie de Čech de X^{an} coïncide avec sa cohomologie singulière qui s'annule pour $q > 2r$ (X^{an} est de dimension réelle $2r$ par la proposition 18). On a donc l'initialisation de la récurrence.

Supposons le résultat démontré pour $q + 1$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent, il existe une suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{L}$ est une somme directe finie de faisceaux de la forme $\mathcal{O}(n)$. $\mathcal{L}$ vérifie donc le théorème. Les suites exactes longues donnent le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} H^q(X, \mathcal{R}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{L}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{R}) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{L}) \\ \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon_3 & & \downarrow \varepsilon_4 & & \downarrow \varepsilon_5 \\ H^q(X^{an}, \mathcal{R}^{an}) & \twoheadrightarrow & H^q(X^{an}, \mathcal{L}^{an}) & \twoheadrightarrow & H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an}) & \twoheadrightarrow & H^{q+1}(X^{an}, \mathcal{R}^{an}) & \twoheadrightarrow & H^{q+1}(X^{an}, \mathcal{L}^{an}). \end{array}$$

L'hypothèse de récurrence assure que ε_4 et ε_5 sont des isos, et ε_2 est également un iso. Donc par le lemme des cinq ε_3 est un épi. Mais alors en faisant $\mathcal{F} = \mathcal{R}$ on obtient que ε_1 est aussi un épi. On réapplique le lemme des cinq et on obtient que ε_3 est un mono, ce qui démontre le théorème. $\square$

Théorème 6 *Si $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -schéma projectif, le foncteur d'analytification induit une équivalence de catégories entre ($\mathcal{O}_X$ -modules cohérents) et ($\mathcal{O}_{X^{an}}$ -modules cohérents).*

Preuve : Montrons d'abord la pleine fidélité. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents, et considérons le faisceau (cohérent) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Notons $\varphi : X^{an} \rightarrow X$ l'analytifié, alors comme φ est plat et $\mathcal{F}$ de présentation finie, le morphisme canonique

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^{an} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{F}^{an}, \mathcal{G}^{an})$$

est un iso. Ainsi l'application

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{F}^{an}, \mathcal{G}^{an})$$

n'est rien d'autre que la flèche

$$H^0(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \longrightarrow H^0(X^{an}, (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^{an})$$

qui est un iso par le théorème 5. D'où la pleine fidélité.

Il s'agit maintenant de montrer l'essentielle surjectivité. On peut encore une fois se ramener à montrer le résultat pour X de la forme $\mathbb{P}^r$. En effet, on a à nouveau la situation

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{P}^r)^{an} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^r \\ j \uparrow & & \uparrow i \\ V(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X^{an}}) = X^{an} & \xrightarrow{\varphi} & X = V(\mathcal{I}) \end{array}$$

donc si le résultat est démontré pour $\mathbb{P}^r$ et si $\mathcal{M}$ est un faisceau cohérent sur X^{an} , $j_*\mathcal{M}$ est cohérent (car j est une immersion fermée) sur $(\mathbb{P}^r)^{an}$. Il existe alors $\mathcal{G}$ cohérent sur $\mathbb{P}^r$ tel que $\mathcal{G}^{an} \simeq j_*\mathcal{M}$, qui vérifie $\mathcal{I} \cdot \mathcal{G} = 0$ (car φ est plat et induit une bijection de X^{an} sur les points fermés de X qui est de Jacobson, cf [EGA4] IV 10.4.7). Donc $\mathcal{G}$ s'écrit $i_*\mathcal{F}$ pour un $\mathcal{F}$ cohérent sur X . Alors on a $j_*\mathcal{M} \simeq j_*(\mathcal{F}^{an})$ et ainsi $\mathcal{M} \simeq \mathcal{F}^{an}$ puisque j est une immersion.

On suppose donc $X = \mathbb{P}^r$ et on fait une récurrence sur r , le cas $r = 0$ étant clair. On utilise alors le fait suivant (dont la démonstration utilise l'hypothèse de récurrence et le théorème 5, voir [Ser] n° 16 lemme 8) : si $\mathcal{M}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^r$, il existe des entiers n et $p \geq 0$ tels que $\mathcal{M}$ soit isomorphe à un quotient de $\mathcal{O}_{X^{an}}(n)^p$. Si on pose $\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_X(n)^p$ on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow (\mathcal{L}_0)^{an} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

avec $\mathcal{R}$ cohérent. Le même résultat appliqué à $\mathcal{R}$ montre l'existence d'un faisceau cohérent $\mathcal{L}_1$ sur X et d'une suite exacte

$$(\mathcal{L}_1)^{an} \xrightarrow{g} (\mathcal{L}_0)^{an} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Mais le foncteur d'analytification est plein, donc il existe une flèche $f : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0$ vérifiant $f^{an} = g$, et si $\mathcal{F}$ est le conoyau de f on a la suite exacte

$$\mathcal{L}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

qui après analytification donne la suite exacte

$$(\mathcal{L}_1)^{an} \xrightarrow{g} (\mathcal{L}_0)^{an} \longrightarrow \mathcal{F}^{an} \longrightarrow 0.$$

Donc $\mathcal{M} \simeq \mathcal{F}^{an}$ et on a le théorème. $\square$

3.3 Groupe fondamental d'une courbe projective lisse

Corollaire 5 *Soit X un $\mathbb{C}$ -schéma projectif. Le foncteur qui à tout schéma fini (resp. étale fini) X' au-dessus de X associe X'^{an} est une équivalence de la catégorie des X -schémas finis (resp. étales finis) dans la catégorie des X^{an} -espaces analytiques finis (resp. étales finis).*

Preuve : Le foncteur d'analytification

$$(\mathbb{C}\text{-schémas localement de type fini}) \longrightarrow (An)$$

envoie les morphismes finis (resp. étales finis) sur des morphismes finis (resp. étales finis) par la proposition 19. Or se donner un morphisme fini $X' \rightarrow X$ (resp. $X'^{an} \rightarrow X^{an}$) équivaut à se donner un faisceau cohérent d'algèbres sur $\mathcal{O}_X$ (resp. sur $\mathcal{O}_{X^{an}}$, voir [Car] n° 19 §5 th 2). $\square$

Définition 16 *Si G est un groupe, on appelle complété profini de G et on note $\widehat{G}$ le groupe profini limite projective du système des G/N , N parcourant les sous-groupes distingués d'indice fini de G , ordonné par l'ordre opposé à l'inclusion.*

Théorème 7 *Soient X un $\mathbb{C}$ -schéma connexe projectif, $\varphi : X^{an} \rightarrow X$ l'espace analytique associé et $x \in X^{an}$. Notons $\bar{a} : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow X$ le morphisme donné par le point $\mathbb{C}$ -rationnel $\varphi(x)$.*

On suppose que X^{top} , l'espace topologique sous-jacent à X^{an} , est localement simplement connexe. Alors $\pi_1(X, \bar{a})$ est isomorphe au complété profini du groupe fondamental $\pi_1(X^{top}, x)$ en x de X^{top} .

Preuve : Le principe de la preuve est le suivant : on a les équivalences de catégories successives

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\pi_1(X, \bar{a})) &\xrightarrow[(1)]{\sim} (\text{revêtements étales de } X) \\ &\xrightarrow[(2)]{\sim} (\text{espaces analytiques étales finis au-dessus de } X^{an}) \\ &\xrightarrow[(3)]{\sim} (\text{revêtements topologiques finis de } X^{top}) \\ &\xrightarrow[(4)]{\sim} \mathcal{C}(\pi_1(\widehat{X^{top}}, x)) \end{aligned}$$

ce qui permettra de conclure avec la proposition 10.

L'équivalence (1) vient simplement de la définition de $\pi_1(X, \bar{a})$, et (2) est

le corollaire 5.

Pour (3), montrons que le foncteur d'oubli

$$(\text{espaces étales finis au-dessus de } X^{an}) \xrightarrow{For} (\text{revêtements finis de } X^{top})$$

est une équivalence de catégories. On vérifie d'abord qu'il est bien défini : si $\mathcal{X} \xrightarrow{p} X^{an}$ est un espace analytique étale fini au-dessus de X^{an} , montrons que p est un revêtement topologique fini de X^{top} . p est étale donc est un iso local, et en particulier un homéomorphisme local. Soit $y \in X^{top}$, et vérifions que y possède un ouvert trivialisant. Soit $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$ la fibre (éventuellement $r = 0$). p est séparé, soient donc pour tout i des voisinages ouverts U_i de x_i disjoints deux à deux. Quitte à restreindre les U_i , on peut supposer que les $p|_{U_i}$ induisent des isos sur un voisinage ouvert V de y .

Quitte à restreindre encore les U_i , V on peut assurer

$$p^{-1}(V) = \coprod_{1 \leq i \leq r} U_i.$$

En effet, seule l'inclusion $\subseteq$ pose problème, et elle sera vérifiée si on peut prendre V tel que le cardinal de la fibre d'un point de V est inférieur ou égal à r .

On sait par l'équivalence (2) que p provient (à iso près) par analytification d'un morphisme (étale fini) $X' \xrightarrow{f} X$. On écrit (le foncteur d'analytification commute aux produits fibrés) :

$$\begin{array}{ccccc} & & X'_{\varphi(y)} & \longrightarrow & X' \\ & \nearrow \psi & \downarrow & & \downarrow f \\ & & \text{Spec}(k(\varphi(y))) & \longrightarrow & X \\ & & & \nearrow \varphi & \\ \mathcal{X}_y & \longrightarrow & \mathcal{X} & & \\ \downarrow & & \downarrow p & & \\ \{y\} & \longrightarrow & X^{an} & & \end{array}$$

avec $\varphi(y) \in \mathbb{C}$ -rationnel, donc $X'_{\varphi(y)}$ est une somme disjointe finie de copies de $\text{Spec}(\mathbb{C})$ et son analytifié, $\mathcal{X}_y$, est de même cardinal. Donc le cardinal des fibres de p est localement constant, puisque φ est continue et le cardinal des fibres géométriques de f est localement constant. Donc le foncteur For est bien défini.

On construit un quasi-inverse G pour For de la façon suivante : si $Y^{top} \xrightarrow{g} X^{top}$ est un revêtement fini de X^{top} , comme g est un homéomorphisme local, on fixe des ouverts $U_y \ni y$ et V_y de Y^{top} et X^{top} tels que g induit des homéo $U_y \rightarrow V_y$, ce qui nous permet de remonter les faisceaux $\mathcal{O}_{X^{an}}|_{V_y}$ sur U_y , puis de les recoller. On obtient ainsi un espace analytique étale fini $\underbrace{\mathcal{Y} \xrightarrow{k} X^{an}}_{G(Y^{top})}$ au-

dessus de X^{an} tel que $|\mathcal{Y}| = Y^{top}$ et $|k| = g$.

Si $h : Z^{top} \rightarrow Y^{top}$ est un morphisme de X^{top} -espaces, on vérifie qu'il existe un unique morphisme d'espaces analytiques ω tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(Z^{top}) & \xrightarrow{\omega} & G(Y^{top}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & X^{an} & \end{array}$$

commute et $|\omega| = h$, et on pose $G(h) := \omega$. On vérifie alors que G et For sont quasi-inverses l'un de l'autre, ce qui montre le point (3).

Enfin pour le point (4), on a X^{top} connexe (par la proposition 18) et localement simplement connexe, donc (voir [Dou] 4.6.8) le foncteur

$$\begin{array}{ccc} F : (\text{revêtements de } X^{top}) & \longrightarrow & Ens \\ Y^{top} \xrightarrow{p} X^{top} & \longmapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

induit une équivalence de catégories

$$(\text{revêtements de } X^{top}) \longrightarrow (\pi_1(X^{top}, x)\text{-Ens})$$

qui à son tour induit une équivalence

$$(\text{revêtements topologiques finis de } X^{top}) \longrightarrow (\pi_1(X^{top}, x)\text{-Ens}).$$

Mais ([Dou] 2.9.5), $(\pi_1(X^{top}, x)\text{-Ens})$ s'identifie à $(\pi_1(\widehat{X^{top}}, x)\text{-Ens})$, et on a (4). $\square$

Corollaire 6 *Soient X une courbe projective lisse connexe sur $\mathbb{C}$, de genre g , et comme au-dessus $\varphi : X^{an} \rightarrow X$ l'espace analytique associé, $x \in X^{an}$, $\bar{a} : \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow X$ le morphisme donné par le point $\varphi(x)$.*

Alors

$$\pi_1(X, \bar{a}) \simeq \widehat{\Gamma}_g$$

où Γ_g est le quotient du groupe libre sur les $2g$ éléments $\{a_i, b_i\}_{1 \leq i \leq g}$ par la relation $\prod_{1 \leq i \leq g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Preuve : On souhaite appliquer le théorème précédent. $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ est lisse donc X est régulier, ainsi que X^{an} par la proposition 18, qui donne également $\dim(X^{an}) = \dim(X) = 1$. Or un espace analytique est régulier de dimension n en un de ses points ssi il existe un voisinage ouvert de ce point isomorphe à un ouvert de l'espace affine $\mathcal{E}^n$ (voir [Car] n° 13 cor. 1.10). En particulier le théorème 7 s'applique et donne

$$\pi_1(X, \bar{a}) \simeq \pi_1(\widehat{X^{top}}, x).$$

X^{top} est séparé et compact, et il admet une structure de surface de Riemann tel que $\mathcal{O}_{X^{an}}$ soit isomorphe à son faisceau de fonctions holomorphes. En effet on prend pour cartes locales les $|\psi|$ pour $\psi : U \rightarrow V$ un isomorphisme d'espaces analytiques entre un ouvert U de X^{an} et un ouvert V de $\mathbb{C}$.

Deux telles cartes $\psi_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $\psi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sont compatibles entre elles, car un morphisme d'espaces analytiques entre deux ouverts W, W' de $\mathbb{C}$ est de la forme $(f, \cdot \circ f)$ pour une fonction holomorphe $f : W \rightarrow W'$, fait qui provient de la bijection

$$\begin{aligned} \text{Hom}(W, \mathbb{C}) &\rightarrow \Gamma(W, \mathcal{O}_W) \\ g &\mapsto g_{\mathbb{C}}^{\#}(Id_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

On vérifie alors que $\mathcal{O}_{X^{an}} \simeq \mathcal{O}_{hol}$.

La surface de Riemann obtenue est de genre

$$\begin{aligned} g' &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(X^{top}, \mathcal{O}_{hol}) \\ &= \dim H^1(X^{top}, \mathcal{O}_{X^{an}}) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad (\text{par GAGA}) \\ &= g \end{aligned}$$

et il est connu que son groupe fondamental est alors Γ_g . $\square$

Références

- [Bou] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*.
- [Car] H. Cartan, *Séminaire E.N.S. 1960/61 : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*.
- [Dem] J.P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*.
- [Dou] A. Douady, R. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*.
- [EGA3] J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique III : Etude cohomologique des faisceaux cohérents (EGA3)*.
- [EGA4] J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique IV : Etude locale des schémas et des morphismes de schémas (EGA4)*.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*.
- [Liu] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*.
- [Mur] J.P. Murre, *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*.
- [Ray] M. Raynaud, *Anneaux locaux henséliens*.
- [Ser] J.P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Annales de l'institut Fourier*, **6** 1956 pp.1-42.
- [SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*.