

Éclatements

1 Définition

Soit X un schéma et $\mathcal{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux définissant un sous-schéma fermé $Y \subsetneq X$.

Définition 1.1 L'éclatement de $\mathcal{I}$ (ou de Y) dans X est le X -schéma $\tilde{X}$ défini par

$$\tilde{X} = \text{Proj} \left(\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d \right)$$

Le morphisme $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ est projectif, dominant et birationnel. Il y a un faisceau inversible canonique relativement ample $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(1) = \mathcal{I} \mathcal{O}_{\tilde{X}}$.

L'algèbre $\bigoplus \mathcal{I}^d$ est appelée *algèbre de Rees*. Il est souvent astucieux pour clarifier les calculs de la noter $\bigoplus \mathcal{I}^d t^d$ et de la voir ainsi comme une sous-algèbre de $\mathcal{O}_X[t]$. Il devient évident que si X est intègre alors $\tilde{X}$ l'est aussi.

La formation de l'éclatement commute au changement de base plat sur X . (Alors que la formation de Spec ou de Proj commute aux changements de base quelconques ; le problème ici est d'avoir $f^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y = f^* \mathcal{I}$.) Voir aussi plus loin sur ce point.

1.2 Une autre façon de présenter $\tilde{X}$ est de supposer qu'on veuille utiliser Y pour définir un morphisme vers un espace projectif, comme si c'était un diviseur. Si $\mathcal{I}$ est globalement engendré par r sections, alors l'éclatement est le plus petit X -schéma sur lequel ces sections définissent bien un morphisme vers $\mathbb{P}^{r-1}$:

Définition 1.3 Supposons $\mathcal{I}$ globalement engendré par des sections $s_1, \dots, s_r \in H^0(X, \mathcal{I})$. Soit $s: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$ l'application rationnelle définie par le morphisme d'algèbres $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_r] \rightarrow \mathcal{O}_X, T_i \mapsto s_i$. L'éclatement de $\mathcal{I}$ dans X est le graphe de cette application, c'est-à-dire l'adhérence schématique de $\Gamma_s \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$.

L'application $s = [s_1 : \dots : s_r]: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$ est définie exactement sur l'ouvert $U = X - Y$. Ainsi $\tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{r-1}$ est l'adhérence schématique de U .

Aussi, notons qu'on peut prendre des sections $s_1, \dots, s_r$ ayant des pôles, si ça nous arrange. Par exemple pour éclater un point dans $\mathbb{P}^2$ muni de coordonnées homogènes $[x : y : z]$, on prendra $s_1 = x/y$ et $s_2 = y/z$, ou même on définira directement $s = [x : y]$.

2 Propriété universelle

2.1 Préimages d'idéaux. Soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme de schémas, et $Z \subset X$ un sous-schéma fermé d'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$. On a les morphismes $f^{-1}: f^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$ et $f^\sharp: \mathcal{O}_X \rightarrow f_* \mathcal{O}_Y$ (obtenus l'un à partir de l'autre par adjonction). On rappelle que

- (i) on a $f^{-1} \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ mais $f^{-1} \mathcal{I}$ n'est pas $\mathcal{O}_Y$ -module (sauf par ex. si f est dominant),
- (ii) $f^* \mathcal{I} = f^{-1} \mathcal{I} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ n'est pas un idéal de $\mathcal{O}_Y$; il définit la préimage de $\mathcal{I}$ comme $\mathcal{O}_Y$ -module, mais pas comme idéal de définition du sous-schéma fermé $f^{-1}(Z) \subset Y$,
- (iv) $f^{-1} \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ qui est l'image de $f^* \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ est l'idéal qui définit $f^{-1}(Z) \subset Y$.

Dans EGA l'idéal $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$ est plutôt noté $f^*\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Y$.

2.2 Propriété universelle de l'éclatement.

Proposition 2.0.1 Soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement d'un idéal cohérent $\mathcal{I}$. Alors $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est un idéal inversible, et pour tout morphisme $f: Z \rightarrow X$ tel que $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Z$ est inversible, il existe un unique morphisme $\tilde{f}: Z \rightarrow \tilde{X}$ tel que $\pi \circ \tilde{f} = f$.

Si Y est le sous-schéma fermé défini par $\mathcal{I}$, c'est la même chose de dire que $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est un idéal inversible ou que $\pi^{-1}(Y)$ est un diviseur de Cartier. Montrons simplement que $\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est inversible. Le truc crucial c'est que $\tilde{X}$ est recouvert par les ouverts affines $D^+(f) = \text{Spec}(\text{éléments de degré 0 dans le localisé } S_f)$ où f parcourt un système de générateurs de $\mathcal{I}$. On peut écrire

$$\pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^2 t \oplus \mathcal{I}^3 t^2 \oplus \dots = \bigoplus \mathcal{I}^{d+1} t^d$$

et donc, sur $D^+(f)$ on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{D^+(f)} \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{D^+(f)}$ donné par $1 \mapsto f \cdot t^0$.

3 Éclater $\mathcal{I}^r$

Soit $r \geq 1$. Alors les idéaux $\mathcal{I}^r$ et $\mathcal{I}$, resp. les sous-schémas fermés rY et Y , définissent le même éclatement. Pour voir cela on montre qu'ils vérifient la même propriété universelle. Or étant donné un morphisme $f: Z \rightarrow X$, alors $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_Z$ inversible $\iff f^{-1}\mathcal{I}^r \cdot \mathcal{O}_Z$ inversible (d'après le lemme ci-dessous), q.e.d.

Lemme 3.1 Soit X un schéma et $\mathcal{I}$ un faisceau cohérent d'idéaux. Alors pour tout $r \geq 1$, on a :

$$\mathcal{I} \text{ inversible} \iff \mathcal{I}^r \text{ inversible.}$$

Démonstration : Comme $\mathcal{I}$ est cohérent il est inversible ssi $\mathcal{I}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module inversible, pour tout $x \in X$. On suppose donc $X = \text{Spec}(A)$ avec A local. Seul un sens n'est pas évident : supposons que $I^r = (f)$ avec $f \in A$ non diviseur de 0. Soient $x_1, \dots, x_m$ des générateurs de I en nombre m minimal, de sorte que I^r est engendré par les produits $x_e = x_{e_1} \dots x_{e_r}$ avec $e = \{e_1, \dots, e_r\} \subset \{1 \dots m\}$. Comme $I^r = (f)$ on peut écrire $x_e = u_e f$ et comme $f \not\parallel 0$ les u_e engendrent A . Enfin A étant local un u_{e_0} est inversible, donc $x_e = u_e u_{e_0}^{-1} x_{e_0}$, donc $m = 1$. $\square$

Commentaires :

- Attention : on a $\sqrt{\mathcal{I}^r} = \sqrt{\mathcal{I}}$ mais en général $\mathcal{I}$ et $\sqrt{\mathcal{I}}$ ne donnent pas le même éclatement.
- Dans Hartshorne (II, § 5) la définition d'un idéal cohérent n'est pas la bonne, ce qui lui pose des problèmes dans le cas de schémas non noëthériens. Pour la bonne définition lire (5.3.1) dans les préliminaires de EGA1.
- Dans EGA2 (8.1.3) il est énoncé que les éclatements de $\mathcal{I}^r$ et $\mathcal{I}$ sont identiques, apparemment sans hypothèse de cohérence. Je ne sais pas comment le montrer.

4 Éclater un sous-schéma régulier

Soit Y un sous-schéma régulier de X (par ex. X variété lisse et Y sous-variété lisse). Dans ce cas la préimage de Y dans X est $\text{Proj}(\bigoplus \mathcal{I}^d / \mathcal{I}^{d+1}) \simeq \text{Proj}(\bigoplus S^d(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)) \simeq P(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)$. C'est le fibré projectif associé à $\mathcal{N}_{Y/X}^\vee$, fibré vectoriel conormal de rang $r = \text{codim}(Y, X)$. Ainsi l'éclatement

sépare les directions normales de Y dans X . Comme les sous-schémas Y et rY ont même fibré normal dans X , ceci justifie d'une autre manière le fait qu'ils donnent lieu aux mêmes éclatements. Supposons $\mathcal{J}$ globalement engendré par des sections $s_1, \dots, s_r$. Alors on a explicitement

$$\tilde{X} = \text{Proj} \left(\frac{\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_r]}{(s_i T_j - s_j T_i)} \right)$$

5 Transformé strict, transformé total

Définition 5.1 Soit $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement de $Y \subset X$ d'idéal $\mathcal{J}$. Soit $f: W \rightarrow X$ un morphisme tel que $f(W) \not\subset Y$. On définit le *transformé strict* $\tilde{W}$ comme étant l'éclaté de W en $f^{-1}(Y)$, et le *transformé total* W^{tot} comme étant le produit fibré $W \times_X \tilde{X}$.

Par la propriété universelle on a une flèche $\tilde{W} \rightarrow W^{\text{tot}}$. Il est facile de voir que c'est une immersion fermée : représentons $\tilde{X}$ comme le graphe de $s: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$. Alors $\tilde{W}$ est simplement le graphe de $s \circ f: W \dashrightarrow \mathbb{P}^{r-1}$ qui est définie sur $V = f^{-1}(U)$, où $U = X - Y$.

On peut vérifier ici que la formation de $\tilde{X}$ commute au changement de base plat sur X , en particulier est locale sur X . En effet lorsque $f: W \rightarrow X$ est plat, on a $f^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_W = f^*\mathcal{J}$ d'où

$$\tilde{W} = \text{Proj} \left(\bigoplus_{d \geq 0} f^* \mathcal{J}^d \right) = \text{Proj} \left(f^* \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{J}^d \right) = W \times_X \tilde{X} = W^{\text{tot}}$$

Définition 5.2 La préimage de Y par l'éclatement $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ est appelée *diviseur exceptionnel*. C'est un diviseur de Cartier, souvent noté E .

6 Calculs d'éclatements

6.1 Éclatements plongés. Supposons qu'on souhaite éclater $Y \subset X$ et que X soit sous-schéma fermé d'un M . On sait que l'éclatement recherché $\tilde{X}$ est le transformé strict de X par l'éclatement $\tilde{M} \rightarrow M$ de Y dans M . Si on a affaire à un schéma X de type fini, comme il est localement sous-schéma fermé d'un espace affine, cela nous ramène au calcul d'éclatements de sous-schémas fermés de $M = \mathbb{A}^n$. Un exemple standard est l'éclatement d'un point $O \in \mathbb{A}^n$, qui est un sous-schéma fermé régulier donc

$$\tilde{M} = \text{Proj} \left(\frac{k[x_1, \dots, x_n][T_1, \dots, T_r]}{(x_i T_j - x_j T_i)} \right)$$

et on trouve $\tilde{X}$ comme l'adhérence de la préimage de $X - \{O\}$ dans $\tilde{M}$.

6.2 Éclatement dans une fibre de $X \rightarrow S$. (Pour simplifier penser à $S = R =$ un AVD.) On a vu que si on éclate un sous-schéma fermé *régulier* $Y \subset X$, alors le diviseur exceptionnel est lisse sur Y : c'est le projectif du fibré conormal. En particulier si X est régulier alors Y , et $\tilde{X}$, le sont.

La notion de régularité n'est pas une notion relative, et on va voir que si X est lisse sur R et qu'on éclate un sous-schéma de la fibre spéciale alors le résultat n'est plus en général lisse sur R . (En revanche dans le cas d'un AVD de base, si X est plat alors $\tilde{X}$ l'est encore car plat = sans torsion et $\mathcal{O}_{\tilde{X}} \subset \mathcal{O}_X[t]$.)

Exemples 6.3 On note $R = (R, K, k, \pi)$.

(1) Éclater l'origine dans $X = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$. On a $\tilde{X} = \text{Proj} \left(\frac{\mathbb{R}[x][T_1, T_2]}{(\pi T_1 - x T_2)} \right)$ et on voit qu'on a fait apparaître un point double dans la fibre spéciale. L'espace total est néanmoins régulier.

(2) Éclater l'origine dans $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Cette fois-ci le centre de l'éclatement est défini par des sections *méromorphes* x/y et π . On réalise $\tilde{X}$ comme clôture du graphe de l'application rationnelle $[x : \pi y] : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. C'est le sous-schéma de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ défini par $[x : \pi y] = [u : v]$ i.e. $xv = \pi uy$. Pour réaliser ce blow-up comme schéma projectif on utilise le plongement de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$ défini par

$$([a : b], [c : d]) \mapsto [ac : ad : bc : bd]$$

Son équation est $\alpha\delta = \beta\gamma$. On obtient $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^3$ défini par $\alpha\delta = \beta\gamma$ et $\beta = \pi\gamma$, on voit qu'en fait $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^2$ par la seule équation $\alpha\delta = \pi\gamma^2$.

(3) Éclater l'origine dans $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. On peut écrire $\mathbb{P}^2$ comme réunion de 3 affines et utiliser l'expression de l'éclatement d'un sous-schéma régulier. On obtient $\tilde{X}$ comme réunion de 5 ouverts affines, mais pour recoller...? NB : c'est ce que font Eisenbud et Harris dans leur bouquin, pour calculer l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ et trouver l'équation de la conique $\alpha\delta = \pi\gamma^2$ qu'on a ci-dessus. Il y a mieux en utilisant l'adhérence du graphe : $\tilde{X}$ est la clôture du graphe de l'application rationnelle $[x : y : \pi z] : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ c'est-à-dire $\Gamma \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ défini par $[x : y : \pi z] = [u : v : w]$ donc $xv = uy$, $xw = \pi uz$ et $yw = \pi vz$. Segre plonge $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ par

$$([x : y : z], [u : v : w]) \mapsto [xu : xv : xw : yu : yv : yw : zu : zv : zw]$$

Notons $[a : b : c : d : e : f : g : h : i]$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^8$ de sorte que le plongement est défini par les 9 relations

$$ae - bd, af - cd, ah - bg, ai - cg, bf - ce, bi - ch, dh - eg, di - fg, ei - fh.$$

Compte tenu des équations de Γ on ajoute les relations $b = d, c = \pi g$ et $f = \pi h$. On se retrouve avec $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^5$ défini en coordonnées $[a : d : e : g : h : i]$ par :

$$ae - d^2, ah - gd, ai - \pi g^2, dh - ge, di - \pi gh, ei - \pi h^2.$$

La flèche $\tilde{X} \rightarrow X$ est donnée par

$$[a : \dots : i] \mapsto \begin{cases} [a : d : g] \\ [d : e : h] \\ [\pi g : \pi h : i] \end{cases}$$

et on voit que le diviseur exceptionnel $E \subset \tilde{X}_k$ est le 2-plan $a = d = e = 0$. Par ailleurs la fibre spéciale $\tilde{X}_k$ définie par les équations $(ae = d^2, ah = gd, ai, dh = ge, di, ei)$ est la réunion de E et d'une surface intersection de 3 coniques dans $\mathbb{P}^4$, non intersection complète

$$S : (i = 0) \cap (ae = d^2, ah = gd, dh = ge)$$

De plus S et E se rencontrent le long de la droite $a = d = e = i = 0$.

7 Éclatement de la singularité $xy = \pi^n$

7.1 On considère $n \geq 2$ et l'anneau $A = \frac{R[x,y]}{xy - \pi^n}$. On va éclater $X = \text{Spec}(A)$ le long du fermé défini par l'idéal $I = (\pi, x, y)$. Soit $\tilde{A} = \bigoplus I^d t^d \subset A[t]$ l'anneau de Rees, de générateurs en degré 1 notés $\pi t, xt, yt$. Le morphisme qui calcule l'éclatement est

$$\begin{aligned} \varphi : A[\alpha, \beta, \gamma] &\rightarrow \tilde{A} \\ \alpha &\mapsto \pi t \\ \beta &\mapsto xt \\ \gamma &\mapsto yt \end{aligned}$$

Les trois relations évidentes engendrent un idéal que l'on note

$$J = (x\alpha - \pi\beta, y\alpha - \pi\gamma, y\beta - x\gamma) \subset \ker(\varphi).$$

7.2 Recouvrement de $\tilde{X}$ par trois ouverts. L'éclatement $\tilde{X} = \text{Proj}(\tilde{A})$ est recouvert par trois ouverts affines $D_+(\alpha), D_+(\beta), D_+(\gamma)$. Nous allons en fait décrire $\tilde{X}$ par recollement à partir de ces ouverts affines sans les penser comme inclus dans le même espace, c'est-à-dire que nous allons refaire à la main la construction du Proj en recollant des affines. Pour éviter d'être tenté de les voir dans le même espace nous noterons U_α au lieu de $D_+(\alpha)$ (et idem pour les autres ouverts). Nous donnerons des isomorphismes entre des ouverts $U_{\alpha,\beta} \subset U_\alpha$ et $U_{\beta,\alpha} \subset U_\beta$ (et idem pour les autres paires d'ouverts) le long desquels on recollera. Nous ferons toutefois une petite entorse à notre désir de distinguer dans les notations entre U_α (abstrait) et $D_+(\alpha)$ (plongé), en nommant les variables $\alpha/\beta, \alpha/\gamma$ (etc) pour faciliter la description des isomorphismes de recollement. Allons-y. D'abord U_α est le quotient de l'anneau

$$A\left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right]$$

par l'idéal $(J : \pi^\infty)$ réunion croissante des $(J : \pi^n)$. Une autre façon de le dire est que c'est l'anneau obtenu en quotientant d'abord par J , puis par l'idéal de π -torsion $(0 : \pi^\infty)$. Or,

$$J.A\left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right] = (x - \pi\frac{\beta}{\alpha}, y - \pi\frac{\gamma}{\alpha})$$

car la troisième relation est impliquée par les autres. Parmi les relations on a aussi celle déduite de $xy = \pi^n$, à savoir compte tenu de ce qui précède :

$$\pi\frac{\beta}{\alpha} \cdot \pi\frac{\gamma}{\alpha} = \pi^n \quad \text{donc} \quad \pi^2\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} - \pi^{n-2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} - \pi^{n-2}$ est un élément de π -torsion. Comme on doit tuer la π -torsion, on doit donc mettre cet élément dans l'idéal des relations. Le résultat est que

$$U_\alpha \text{ est l'ouvert affine d'anneau } \frac{R[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}]}{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} - \pi^{n-2}}.$$

Par des calculs similaires, on trouve ensuite que U_β est l'ouvert affine d'anneau

$$\frac{R[x, \frac{\alpha}{\beta}]}{\pi - x\frac{\alpha}{\beta}} \quad (\text{et on retient pour la suite que } \frac{\gamma}{\beta} = x^{n-2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \text{ là-dedans}),$$

et U_γ est l'ouvert affine d'anneau

$$\frac{R[y, \frac{\alpha}{\gamma}]}{\pi - y\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (\text{et on retient pour la suite que } \frac{\beta}{\gamma} = y^{n-2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n \text{ là-dedans}).$$

7.3 Recollements.

- On a des ouverts $U_{\alpha,\beta} \subset U_\alpha$ et $U_{\beta,\alpha} \subset U_\beta$ et un isomorphisme $U_{\alpha,\beta} \simeq U_{\beta,\alpha}$ que voici : $U_{\alpha,\beta}$ est l'ouvert affine d'anneau

$$\frac{R[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}]}{\frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} - \pi^{n-2}} = R[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}]$$

et $U_{\beta,\alpha}$ est l'ouvert affine d'anneau

$$\frac{R[x, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}]}{\pi - x \frac{\alpha}{\beta}} = R[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}].$$

L'isomorphisme qui permet de recoller est clair.

- De la même manière on a un ouvert $U_{\alpha,\gamma} \subset U_\alpha$ qui est affine d'anneau

$$\frac{R[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\gamma}]}{\frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\alpha} - \pi^{n-2}} = R[\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\gamma}]$$

et un ouvert $U_{\gamma,\alpha} \subset U_\gamma$ qui est affine d'anneau

$$\frac{R[y, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}]}{\pi - y \frac{\alpha}{\gamma}} = R[\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha}{\gamma}].$$

L'isomorphisme qui permet de recoller est clair.

- À ce stade, il est bon de faire le dessin de ce que l'on obtient après les deux recollements précédents. En fait le dessin pour $n \geq 3$ et le dessin pour $n = 2$ ne sont pas les mêmes donc il faut faire deux dessins. Je laisse un blanc pour les faire :

$n = 2$

$n \geq 3$

- Pour bien faire les choses il faut écrire le dernier recollement le long de $U_{\beta,\gamma}$ et $U_{\gamma,\beta}$. En fait cela ne changera pas l'image de la fibre spéciale que l'on a déjà. On va voir qu'ici il faut distinguer $n \geq 3$ et $n = 2$, précisément en nous rappelant que $\frac{\gamma}{\beta} = x^{n-2}(\frac{\alpha}{\beta})^n$, on voit que l'ouvert $U_{\beta,\gamma} \subset U_\beta$ est affine d'anneau

$$\frac{R\left[x, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{x^{n-2}(\frac{\alpha}{\beta})^n}\right]}{\pi - x \frac{\alpha}{\beta}} = \begin{cases} \frac{R[x, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{x}, \frac{\beta}{\alpha}]}{\pi - x \frac{\alpha}{\beta}} = K[\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}] & \text{si } n \geq 3 \\ \frac{R[x, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}]}{\pi - x \frac{\alpha}{\beta}} = R[\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}] & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

De même en nous rappelant que $\frac{\beta}{\gamma} = y^{n-2}(\frac{\alpha}{\gamma})^n$ on voit que $U_{\gamma,\beta} \subset U_\gamma$ est affine d'anneau

$$\frac{R[y, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{y^{n-2}(\frac{\alpha}{\gamma})^n}]}{\pi - y \frac{\alpha}{\gamma}} = \begin{cases} \frac{R[y, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{1}{y}, \frac{\gamma}{\alpha}]}{\pi - y \frac{\alpha}{\gamma}} = K[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}] & \text{si } n \geq 3 \\ \frac{R[y, \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}]}{\pi - y \frac{\alpha}{\gamma}} = R[\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}] & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Un petit calcul montre que l'isomorphisme d'identification $U_{\beta,\gamma} \simeq U_{\gamma,\beta}$ est donné par $\frac{\beta}{\alpha} \mapsto \pi^{n-2} \frac{\alpha}{\gamma}$ (c'est bien un isomorphisme car si $n \geq 3$ on est sur la fibre générique, donc cela ne change rien au dessin de la fibre spéciale. Si $n = 2$, sur la fibre spéciale on est en train de recoller deux copies de $\mathbb{A}_k^1$ (l'une est une des branches de $U_\beta \otimes k$ et l'autre est l'une est une des branches de $U_\gamma \otimes k$) pour donner un $\mathbb{P}_k^1$, ce qui n'apporte qu'un point à l'infini sur le dessin qu'on avait déjà.

7.4 Remarque : le cas $n = 2$ est donc un peu particulier car dans ce cas, on voit en fait sur les calculs que $U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha,\gamma} = U_\alpha$, de sorte que U_α s'identifie (via les isomorphismes) à un ouvert de U_β et à un ouvert de U_γ . Ce n'est pas le cas pour $n \geq 3$!