Michel Gros
24.05.2016

Faisceaux ℓ-adiques dans le cas classique

0 - Introduction

G groupe réductif $/ \mathbb{C}$

$\mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$

$\mathcal{G}r = G(\mathbb{C}((z)))/G(\mathcal{O}) = \varinjlim \mathcal{G}r_n = \coprod_{\lambda \in P^+} \mathcal{O}_\lambda$

Satake géométrique : $\mathrm{Perv}_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, \mathbb{C}) \xleftrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}_{\check{G}}$, $\begin{cases} \mathcal{IC}^\cdot(\overline{\mathcal{O}}_\lambda) \longleftarrow L(\lambda) & \lambda \in P^+ \\ \mathcal{F}^\cdot \longmapsto \mathbb{H}^*(\mathcal{G}r, \mathcal{F}^\cdot) \end{cases}$

~~[illegible]~~ On peut remplacer $\mathbb{C}$ par un corps alg. clos K

Soit k corps, $\mathrm{char}(k) \neq \mathrm{char}(K)$ $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Perv}_{G(\mathcal{O})}(\mathcal{G}r, k) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rep}_{\check{G}_k} \quad \text{(Mirkovich-Vilonen)}$$

Le thm 0.3 de Zhu donne un analogue de ce résultat pour $\mathbf{F}$ = ext. finie$/\mathbb{Q}_p$ (ou $\mathbb{Q}_p \leftrightarrow K((z))$) et $k = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\ell \neq p$.

I - Cas des variétés alg. complexes : 1. Stratifications

X schéma t. fini $/ \mathbb{C}$ équidim. de dim d_X

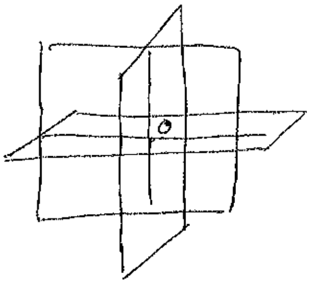
Def : stratification sur X $\overset{\text{def}}{\iff}$ donné d'une partition
$$X = S_0 \amalg \dots \amalg S_d$$

où chaque $S_i \neq \emptyset$, loc. fermée dans X, non-sing., $i = \mathrm{codim}\, S_i$

et, si C_i est $\underbrace{\text{une composante connexe de } S_i}_{(=: \text{un strate})}$ t.q. $C_i \cap \overline{S}_k \neq \emptyset$

alors $C_i \subset \bar{S}_k$, $i \geq k$.

ex :



S_0 = lieu lisse
S_1 = la $\cup$ des arcs $\setminus \{0\}$
$S_2 = \{0\}$

$\mathrm{Strat}(X)$:= l'ensemble des strat. sur X

Si $Z \subseteq X$ fermé , $\mathfrak{Z} \in \mathrm{Strat}(Z)$, $\mathfrak{X} \in \mathrm{Strat}(X)$

Def : $\underline{\mathfrak{X} \text{ raffine } \mathfrak{Z}}$ si chaque strate de Z est union de restrictions de strates de X à Z. On notera $\mathfrak{X} \geq \mathfrak{Z}$.

<u>Prop</u> : (i) Si $\mathfrak{Z} \in \mathrm{Strat}(Z)$, $\exists$ $\mathfrak{X} \in \mathrm{Strat}(X)$ qui la raffine.

(ii) $(\mathrm{Strat}(X), \geq)$ est partiellement ordoné filtrant

$\rightsquigarrow D^b_{\mathfrak{X}-c}(X, \mathbb{C})$, $\forall \mathfrak{X} \in \mathrm{Strat}(X)$, la categorie derivée de complexes de faisceaux (pour la top. analytique) dont les groupes de coh. sont constructible par rapport à $\mathfrak{X}$)

i. $S \hookrightarrow X$, S une reunion de strates , Ri_* n'envoie pas

$$D^b_{\mathfrak{X}_S-c}(S, \mathbb{C}) \text{ dans } D^b_{\mathfrak{X}-c}(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$$

Pour avoir ce type de stabilité, il faut se restreindre aux <u>stratif. de Whitney</u>. (Ce sont celles qui verifient les 2 conditions (a) et (b). de Whitney)

Thm : $\mathrm{Strat}_{Wh}(X) \neq \emptyset$ et qu'elles forment un system cofinal (pour $\geq$) dans $\mathrm{Strat}(X)$.

$$D^b_c(X) = \varinjlim_{\mathfrak{X} \in \mathrm{Strat}(X)} D^b_{\mathfrak{X}-c}(X, \mathbb{C})$$

2. Complexes d'intersection

$X = S_0 \amalg \ldots \amalg S_d$, $\mathfrak{X} \in \mathrm{Strat}_{Wh}(X)$

Def $\mathcal{U}_0 := S_0$, $\mathcal{U}_1 := S_0 \amalg S_1$, ...   (Ex. typique : $\mathcal{U}_0 = X^{lisse}$ ...)

$i_k : \mathcal{U}_k \hookrightarrow \mathcal{U}_{k+1}$

Def : $i^{\mathfrak{X}}_{!*} \mathcal{F}^\circ := \tau_{\leq d-1} R i_{d-1*} \circ \ldots \circ \tau_{\leq 1} R i_{1*} \circ \tau_{\leq 0} R i_{0*} \mathcal{F}^\circ \in D^b(X, \mathbb{C})$

$\mathcal{F}^\circ \in \mathrm{Fais}(\mathcal{U}_0)$

Thm (Deligne) $i^{\mathfrak{X}}_{!*}$ est une equivalence de categories entre $\mathrm{Loc}(\mathcal{U}_0)$ et la sous-categorie pleine de $D^b_{\mathfrak{X}-c}(X, \mathbb{C})$ dont les objects sont les complexes de faisceaux $\mathcal{F}^\circ$ t.q.

les systèmes locaux $/\mathcal{U}_0$

$\mathcal{H}^m(F^\circ) = 0$ pour $m < 0$, $\mathcal{H}^\circ(F^\circ) \in \mathrm{loc}(\mathcal{U}_0)$

(o) $\mathcal{H}^m(F^\circ[d])|_{\mathcal{U}_0} = 0$ pour $m > -d$

et pour chaque strat $S \in \mathfrak{X}$ de codim > 0

(S) $\underline{\mathcal{H}}^m(F^\circ[d])|_S = 0$ pour $m \geq -d_S$

(S') $\underline{\mathcal{H}}^m(\mathbb{D}(F^\circ[d]))|_S = 0$ — " —

$\mathbb{D}$ = dual de Grothendieck – Verdier

<u>Notation</u> : $\imath^{\mathfrak{X}}_{!*}\mathcal{L} =: \underline{IC}^\circ_{\mathfrak{X}}(X, \mathcal{L})$, $\mathcal{L} \in Loc(\mathcal{U}_0)$

$IC_{\mathfrak{X}}(X) \subseteq D^b_{\mathfrak{X}-c}(X, \mathbb{C})$ l'image ess. de ce foncteur =: <u>la categorie des complexes d'intersection</u> (abelienne)

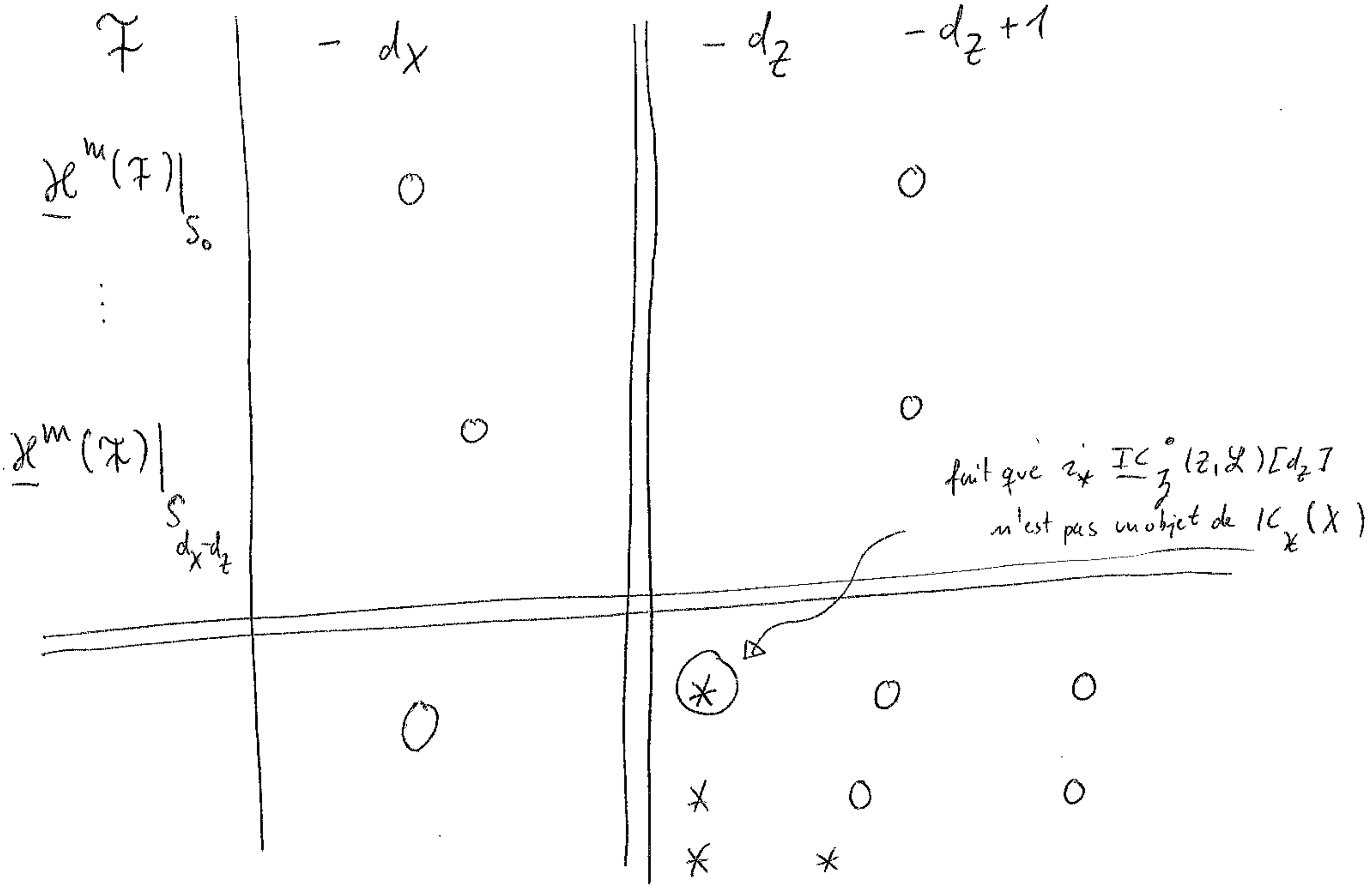
$\mathcal{F} := F^\circ[d]$ $= \mathbb{D}(F^\circ[d])$	$-d_X$	$-d_X+1$	$-d_X+2$	....
$\underline{\mathcal{H}}^m(\mathcal{F})\|_{S_0}$	*	0	0	
$\underline{\mathcal{H}}^m(\mathcal{F})\|_{S_1}$	*	0		
$\underline{\mathcal{H}}^m(\mathcal{F})\|_{S_2}$	*	*		

3. <u>Images de complexes d'$\cap$ et faisceaux pervers</u>

$\imath : Z \hookrightarrow X$ immersion fermée , $\mathcal{L}$ system local sur $\mathcal{U}$ ouvert lisse de Z

$\mathfrak{Z} \in Strat(Z)$

4 $F^\circ = \imath_* \underline{IC}^\circ_{\mathfrak{Z}}(Z, \mathcal{L})[d_Z]$



<u>Def</u> $\mathcal{X} \in \mathrm{Strat}_{wh}(X)$, $\mathcal{F}^\bullet \in D^b_{\mathcal{X}-c}(X)$ est dit <u>pervers</u> si

(S) $\underline{\mathcal{H}}^m(\mathcal{F}^\bullet[d_X])|_S = 0$ pour $m > -d_S$

(S') $\underline{\mathcal{H}}^m(\mathbb{D}(\mathcal{F}^\bullet[d_X]))|_S = 0$ pour $m > -d_S$

La sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathcal{X}-c}(X)$ correspondante $=: \mathrm{Perv}_{\mathcal{X}}(X)$

$\mathrm{Perv}(X) := \varinjlim_{\mathcal{X}} \mathrm{Perv}_{\mathcal{X}}(X)$

Prop : $i : Z \hookrightarrow X$ $\qquad$ Z une réunion de strates

(a) i immersion fermé $\qquad$ $i_* \, \mathrm{Perv}(Z) \subseteq \mathrm{Perv}(X)$

(b) i immersion ouverte $\qquad$ $i^{-1} \mathrm{Perv}(X) \subseteq \mathrm{Perv}(Z)$

(c) Si $Z = \coprod S_\alpha$ est réunion de strates ~~[illegible]~~, alors

$$\mathcal{F}^\circ \in \mathrm{Perv}(X) \qquad i^{-1}\mathcal{F}^\circ = \bigoplus_\alpha \mathcal{L}_\alpha [d_{S_\alpha}] \quad , \ \mathcal{L}_\alpha \text{ sys. local}$$

4. Thm de structure

Prop : $\mathcal{F}^\circ$ est pervers $\Longleftrightarrow$ pour tout fermé irreductible Z de X, il existe un ouvert dense $\mathcal{U}$ de Z t.q.

$$\underline{\mathcal{H}}^m(\mathcal{F}^\circ)\big|_{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{H}}^m(\mathbb{D}(\mathcal{F}^\circ))\big|_{\mathcal{U}} = 0 \qquad \text{pour } m > -d_Z$$

Thm : (a) $\mathrm{Perv}(X)$ est une sous-categorie abelienne de $D^b_c(X)$ artinienne noetherienne admissible

(suites exactes dans $\mathrm{Perv}(X)$
$\Longleftrightarrow$ triangles exactes dans $D^b_c(X)$)

(b) Tout object simple de $\mathrm{Perv}(X)$ est de la forme $i_* IC^\circ(Z, \mathcal{L})$ avec Z irreductible et $\mathcal{L}$ syst. local irreductible sur un ouvert lisse de Z.

(c) Tout object de Perv(X) est extension finie d'objects simples.

II. Cas des schémas

X schéma type fini sur un corps k

faisceaux pour la top. étale, faisceaux de $\mathbb{Z}/\ell^*$-modules

($\ell \neq char(k)$ ~~[illegible]~~)

Ce qui remplace les strat. de Whitney:

$(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ une pair avec

(a) $\mathcal{S}$: stratification de X := partition de X en une finie parties localement fermé (=: les strates de X). L'adherence d'une strate est réunion de strates et sur $\bar{k}$, le reduit de chaque strate est lisse et equidimensionelle.

(b) $\mathcal{L}$: ~~[illegible]~~ donnée pour chaque strate S d'une famille finie $\mathcal{L}(S)$ de classes d'isomorphisme de faisceaux ~~localement constant~~ ~~constructible~~ localement constant sur S ($\mathbb{Z}/\ell^*$-de modules!) et irreductible dans cette categorie.

Def: $\mathcal{F}$ faisceaux sur X est dit $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible si sa restriction à chaque strate S est extension fini de faisceaux dans $\mathcal{L}(S)$.

Def $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$ raffine $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ si chaque strate de $\mathcal{S}$ est reunion de strates de $\mathcal{S}'$ et si $F \in \mathcal{L}(S)$ est aussi $(\mathcal{S}', \mathcal{L}')$-constructible.

On impose ($\rightsquigarrow$ "stabilité par l'image directe")

(c) Pour l'inclusion j d'une strate S dans X, les $R^m j_* F$, $F \in \mathcal{L}$, sont $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$-constructible.

<u>Prop</u> : Si $(\mathcal{S}, \mathcal{L})$ vérifie (a) et (b), on peut la raffiner pour qu'elle vérifie (c).

<u>Remarque</u> (dans le cas complex) :

Groupe algébrique connexe K agissant sur X, $K \times X \xrightarrow{a} X$

$\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X)$ est dit <u>K-equivariant</u> s'il existe un isomorphisme $\Phi : a^* \mathcal{F} \cong pr_2^* \mathcal{F}$ t.q. $\Phi|_{\{1\} \times X} = id.$

$\mathrm{Perv}_K(X)$ = sous-categorie de $\mathrm{Perv}(X)$ des complexes K-equiv.