Bouchage de trou

selon X. Zhu

Le 17 mai 2016 (1)

Moret-Bailly #3.

4.3. Proposition (Déperfection des actions de groupes)
Soient H un k-schéma en groupes affine (parfait) ppf opérant sur X affine ppf.
Alors il existe une déperfection $H' \times X' \to X'$ avec H'/k lisse et X'/k de type fini.

Dém : utilise :

4.3.1. Lemme (SGA3 VI_B, 11.10.bis nouvelle édition SMF)
S schéma noethérien, G un S-schéma en groupes plat et quasi-compact et séparé, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module qcoh avec action de G. Alors $\mathcal{E}$ est $\varinjlim$ de ses sous-modules cohérents G-stables.
[Dû à Serre dans le cas S et G affines, Thomason cas général]

Dém de 4.3

$X = \mathrm{Spec}(R)$, $H = \mathrm{Spec}(A)$. Soit $X' = \mathrm{Spec}(R')$ et $H' = \mathrm{Spec}(A')$ des déperfections. Notons l'action :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes_k R \\ \cup & & \\ R' & & \end{array}$$

Soit $M' \subset R'$ un sous-k-EV de dim finie qui engendre R' comme algèbre. D'après 4.3.1, il existe $W \subset R$ de dim finie sur k, contenant M' et stable par H.
Alors Δ induit $W \to A \otimes_k W$
Pour $q = p^n \gg 0$, on a $W \subset (R')^{1/q}$
et $\Delta(W) \subset (A')^{1/q} \otimes W$

Notons R'' la k-algèbre engendrée par W dans R.
Alors $R' \subset R'' \subset R'^{1/q}$ donc $R''^{p^{-\infty}} = R$ et R'' de type fini sur k.
De plus $\Delta(R'') \subset A'^{1/q} \otimes R''$ donc on peut prendre

$$H' = \operatorname{spec} (A')^{1/q} \text{ et } X' = \operatorname{spec} (R'') \qquad \boxtimes$$

4.4. Proposition Soit H opérant sur X comme dans 4.3.
(*remplacer "affine" par "admettant une déperfection"?)
On suppose que l'action est libre : $H \times X \to X \times X$ mono.
Alors le faisceau fpqc quotient $[X/H]$ est (représentable par) un espace algébrique parfait ppf, qui est séparé si l'action est propre.

4.4.1. Lemme Soit Y un espace algébrique ppf et $Y \to X$ étale, H-équivariant, tel que $[Y/H]$ est représentable
Alors $[X/H]$ est également représentable. (et réciproquement)
(Noter que $H \curvearrowright X$ librement $\to H \curvearrowright Y$ librement aussi)

Dém $Y \to Y/H$ est un H-torseur donc localement trivial pour la top. étale. D'après le sens réciproque, on peut supposer que $Y \to [Y/H]$ a une section.
Dans le diagramme suivant de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & [Y/H] \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & [X/H] \end{array}$$

Ce carré est cartésien car flèches horiz. = torseurs.

les flèches du carré sont des épi de faisceaux fpqc.
Notons $U = [Y/H]$ qui est un espace algébrique par hypothèse, et $R = U \times_{[X/H]} U \hookrightarrow U \times_k U$

Il suffit de voir que (a) R est un espace algébrique
(b) $pr_1 : R \to U$ est étale.

En fait (a) $\Rightarrow$ (b) via descente fpqc de $Y \to U$.
Reste (a). Ici R est un sous-faisceau de $U \times_k U$ dont l'image réciproque dans $Y \times_k Y$ est $R_Y := Y \times_{[X/H]} Y$. Contemplons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
Y \times_k Y \arrow[r] & U \times_k U \arrow[r] & {[X/H] \times [X/H]} \\
R_Y \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\square"] & R \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[ur, phantom, "\square"] & {[X/H]} \arrow[u, hook, "\mathrm{diag}"']
\end{tikzcd}$$

Là : « pour ceux qui prennent des notes, tant pis » et le diagramme est transformé sauvagement en

$$\begin{tikzcd}
Y \times_k Y \arrow[r] & X \times_k X \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\exists\ \text{section}"'] & {[X/H] \times [X/H]} \\
R_Y \arrow[r] \arrow[u, hook] & X \times_{[X/H]} X \arrow[r] \arrow[u] & {[X/H]} \arrow[u, "\mathrm{diag}"']
\end{tikzcd}$$

Suffit de voir que R_Y est un espace alg ; on le voit... ⊠

<u>Dém de 4.4,</u> suite. On fixe une déperfection $H' \times X' \to X'$.
⚠ Elle n'est pas nécess. libre (alors que la perfectisée est libre).

Le morphisme $H' \times X' \to X' \times X'$ devient mono après perfectisation donc il est quasi-fini et radiciel. On considère le champ quotient $[X'/H'] =: \mathcal{X}'$. C'est un champ d'Artin à diagonale quasi-finie.

D'après Keel-Mori (cf Conrad, Lm 2.2) il existe des morphismes de champs :

k-sch qproj   champ d'Artin séparé

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}' \arrow[r, "\text{fini loc libre}"'] & \mathcal{Y}' \arrow[r, two heads, "\text{ét repr.}"'] & \mathcal{X}' \\
Z' \arrow[u, "H'"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y' \arrow[u, "H'"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & X' \arrow[u, "H'"']
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{Z}'$ quasi-proj $\Rightarrow$ Z' aussi (en tout cas si H' affine)

D'après 4.4.1, il suffit de voir que Y/H est représentable (avec $Y = Y'^{p^{-\infty}}$).

<u>4.4.2 Lemme</u> (A.10 dans la dernière version de Zhu)

Soit $V \rightrightarrows U$ un k-espace algébrique en groupoïdes <u>plat</u>

Alors $[U^{p^{-\infty}} / V^{p^{-\infty}}]^{pf} \simeq [U/V]^{pf}$

(où $(-)^{pf}$ désigne la restriction aux k-alg. parfaites), i.e. $[U^{p^{-\infty}}/V^{p^{-\infty}}](R) \simeq [U/V](R)$ $\forall R/k$ parfaite

<u>Dém</u> : formelle utilisant le fait que $R \mapsto R^{p^{-\infty}}$ préserve la platitude $\boxtimes$

En conséquence de ce lemme, $[Y/H] = \mathcal{Y}'^{pf}$

c'est à la fois le faisceau quotient et le champ quotient

$\mathcal{Y}'$ est aussi le champ quotient de $\mathcal{Z}'$ (qproj) par le groupoïde $\mathcal{Z}' \times_{\mathcal{Y}'} \mathcal{Z}' \rightrightarrows \mathcal{Z}'$ fini loc. libre.

De plus le perfectisé $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} \rightrightarrows \mathcal{Z}$ est une relation d'équivalence parce que $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'^{pf}$ est un faisceau.

<u>4.5. théorème</u> (A.29 dans Zhu)

Soit $V \rightrightarrows U$ une relation d'équivalence avec U, V des k-schémas ppf. On suppose que $V \rightrightarrows U$ est perfectisé d'un groupoïde $V' \rightrightarrows U'$ fini loc. libre avec V', U' quasi-projectifs sur k.

Alors $[U/V]$ est un k-schéma ppf.

<u>Dém</u> On se ramène à $U' = \operatorname{spec} A$ et $V' = \operatorname{spec} B$ en utilisant l'hypothèse quasi-projective.

On pose $C = \ker(A \rightrightarrows B)$, on a $C^{p^{-\infty}} = \ker(A^{p^{-\infty}} \rightrightarrows B^{p^{-\infty}})$.

On va montrer que $[U/V] \to \operatorname{Spec} C^{p^{-\infty}}$ est un <u>iso</u>.

$$\begin{array}{ccccc} V & \rightrightarrows & U & \to & X = \operatorname{spec} C^{p^{-\infty}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V' & \rightrightarrows & U' & \to & X' = \operatorname{spec} C \end{array}$$

Pour cela on mq (a) $V \to U \times_X U$ est un isom.

(b) $U \to X$ est fidèlement plat

Ces deux assertions suffisent car

(a) implique que $[U/V] \to X$ est un mono } de faisceaux
(b) —— " —— épi }

Allons-y. Comme $V' \rightrightarrows U'$ est fini localement libre, on sait par SGA3 $\underline{V}$ th 4.1 que

$U' \to X'$ fini surjectif $\Rightarrow U \to X$ entier surjectif

$V' \to U' \times_{X'} U'$ fini surjectif $\Rightarrow V \to U \times_X U$ entier surjectif

Comme $V \to U \times_X U \to U \times_k U$ est un mono, alors $V \to U \times_X U$ est un mono. entier surjectif entre schémas réduits donc un <u>iso</u>

Reste à voir que $C^{p^{-\infty}} \to A^{p^{-\infty}}$ est <u>plat</u>.

Or par le changement de base $C^{p^{-\infty}} \to A^{p^{-\infty}}$, on trouve $A^{p^{-\infty}} \to B^{p^{-\infty}}$ qui est plat (perfectisé de $\underset{\text{fini loc-libre}}{A \to B}$).

<u>4.5.2. Lemme</u> (A.30)

$f : R \to S$ morphisme injectif d'anneaux parfaits perfectisé d'un morphisme fini. Alors f descend la platitude : si $M \otimes_R S$ est S-plat alors M est R-plat

<u>Dém</u> Il suffit de le montrer pour $R_1 \to R_1 \otimes_R S$ où $R \to R_1$ est fidèlement plat (immédiat).

Soit $R' \to S'$ fini qui déperfectise $R \to S$.

On peut écrire S' comme un quotient de

$$S'_1 := R'[X_1, \dots, X_n]/(P_1(X_1), \dots, P_n(X_n))$$

avec $P_i \in R'[X]$ unitaire (pol. en 1 variable).

Par extension fidèlement plate $R' \to R''$ on peut supposer les P_i décomposés : $P_i(X) = \prod_{j=1}^{d_i} (X - a_{ij})$ $\quad a_{ij} \in R''$

Alors $\mathrm{spec}\, S'_1 \to \mathrm{spec}\, R'$ admet $d = \prod d_i$ sections, qui recouvrent $\mathrm{spec}\, S'_1$.

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\ell=1}^{d} Z_\ell \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{surjectif}"'] & \coprod_{\ell=1}^{d} \mathrm{Spec}\, R' \arrow[d, "\text{surjectif}"] \\
\mathrm{spec}\, S' \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}\, S'_1 \arrow[d] \\
& \mathrm{Spec}\, R'
\end{tikzcd}$$

On passe aux perfectisés :

$$\coprod_{\ell=1}^{d} Z_\ell^{p^{-\infty}} \longrightarrow \mathrm{spec}\, S \longrightarrow \mathrm{spec}\, R$$

où Z_ℓ est un certain sous schéma fermé de $\mathrm{spec}\, R$.

Sur les anneaux : $\quad R \to S \to \prod_{\ell=1}^{d} R/J_\ell$

noyau nilpotent, or S réduit (car parfait)

donc $\bigcap J_\ell = 0$. Alors :

<u>4.5.3 Lemme</u> (SP, Tag 0522) R anneau, $J_1, \dots, J_m$ idéaux. Si $\bigcap J_i = 0$ alors $R \to \prod R/J_i$ descend la platitude $\boxtimes$