La Grassmannienne affine

k corps, $\mathcal{O} = k[[t]]$, $F = k((t))$

§ k-espaces

Déf. Un k-espace est un foncteur $F : (Sch/k)^{\circ} \longrightarrow Sets$ tq

* $F(X) \longrightarrow \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$ exact

si $X = \bigcup U_i$, U_i ouvert

* $F(\mathrm{Spec}\, R) \longrightarrow F(\mathrm{Spec}\, R') \rightrightarrows F(\mathrm{Spec}\, R' \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}\, R')$ exact

si $R \longrightarrow R'$ est fidèlement plat

Rem: k-espace = faisceau fpqc

On a : (a) $Sch_{/k} \longrightarrow k$-espaces pleinement fidèle
$Z \longmapsto \mathrm{Hom}(-, Z)$

(b) $\underleftrightarrow{\lim}$ existe dans $\{k\text{-espaces}\}$

Déf: Un k-espace X est un ind-schéma sur k si $X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$

avec $X_n \in Sch_{/k}$ et $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ est une immersion fermée.

ex: * $R \longmapsto R[[t]]$ représentable par $\prod_{i \geq 0} \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\, k[X_1, X_2, \dots]$

* $R \longmapsto R((t))$ est l'union des $t^{-n} R[[t]]$, c'est un ind-schéma.

G groupe réductif sur k, déployé sur k

Déf: On définit LG = k-espace associé à $R \longmapsto G(R((t)))$

L^+G = ——— $R \longmapsto G(R[[t]])$

Prop: $L^+G_{/k}$ est un schéma affine et $LG_{/k}$ est un ind-schéma.

Démonstration:

* Cas $G = GL_n$:

$$GL_n(R[[t]]) = \left\{ A = \sum A_i t^i, \quad A_i \in \mathrm{Mat}_n(R), \ A_0 \text{ inv} \right\}$$
$$\hookrightarrow \prod_{i \geq 0} \mathbb{A}_k^{n^2}$$

et on écrit $GL_n(R((t))) = \bigcup \left(t^{-N} \mathrm{Mat}_n(R[[t]]) \cap GL_n(R((t))) \right), \ldots$

* Cas G quelconque:

On a une immersion fermée $G \hookrightarrow GL_n$.

alors $L^+G \subset L^+GL_n$ et $LG \subset LGL_n$ sont fermés. $\square$

Déf: Grass_G = k-espace associé à $R \mapsto LG(R)/L^+G(R)$

s'appelle la grassmannienne affine de G sur k.

Prop: Grass_G est un ind-schéma sur k projectif sur k.

Démonstration: à suivre... (*)

§ Réseaux: (cas $G = GL_n$)

Déf: Un réseau de $R((t))^n$ est un $R[[t]]$-sous-module $\Lambda \subset R((t))^n$

t.q. * Λ est un $R[[t]]$-module projectif de rang n

* $\Lambda \otimes R((t)) = R((t))^n$

Ex: $\Lambda_0 = R[[t]]^n$

Lemme: Soit $\Lambda \subset R((t))^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Λ est un réseau

(2) $\exists\, R \to R'$ fid. plat t.q. $R'[[t]] \otimes_{R[[t]]} \Lambda$ est libre sur $R'[[t]]$

et $\Lambda \otimes R((t)) = R((t))^n$

(3) $\exists N$ t.q $t^N \Lambda_0 \subset \Lambda \subset t^{-N}\Lambda_0$
et $t^{-N}\Lambda_0/\Lambda$ est un R-module projectif

Démonstration:

(1) ⇒ (2): $g_i \in R[\![t]\!]$, $\sum g_i = 1$ t.q $\Lambda \otimes R[\![t]\!]_{g_i}$ libre

on prend $f_i = g_i(0)$; alors $\sum f_i = 1 \in R$

sur $\{f_i \neq 0\}$ ~~alors~~ on a: $g_i \in R_{f_i}[\![t]\!]^\times$ et $\Lambda \otimes R_{f_i}[\![t]\!]$ libre

et la flèche $R \longrightarrow \prod_i R_{f_i}$ est fid. plate

(2) ⇒ (3): Soit $\Lambda' = \Lambda \otimes R'[\![t]\!]$

Par la liberté, $\exists N$ t.q $t^N R'[\![t]\!]^n \subset \Lambda' \subset t^{-N} R'[\![t]\!]$

d'où la conclusion en intersectant avec $R[\![t]\!]^n$

De plus: $\left(t^{-N}R[\![t]\!]^n/\Lambda\right) \otimes_R R' = t^{-N}R'[\![t]\!]/\Lambda'$

et il suffit de mq $t^{-N}R'[\![t]\!]/\Lambda'$ est projectif.

On a une suite exacte:

$$0 \to t^{-N}R'[\![t]\!]/\Lambda' \longrightarrow R'((t))^n/\Lambda' \longrightarrow \underbrace{R'((t))^n/t^{-N}R'[\![t]\!]^n}_{R'\text{-mod. projectif}} \longrightarrow 0$$

$$R'((t))^n/\Lambda' \simeq \bigoplus_{j \le -1} t^j\Lambda'/t^{j+1}\Lambda' \simeq \bigoplus_{j\le -1} \Lambda'/t\Lambda' \text{ est projectif}$$

(somme directe car $\Lambda'/t\Lambda'$ projectif)

Donc $t^{-N}R'[\![t]\!]/\Lambda'$ est projectif

(3) ⇒ (1):

On a $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow t^{-N}R[\![t]\!]^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ (5)

Mq (plus tard) $\mathcal{R}_n$: $R \longmapsto \{\Lambda \subset R((t))^n$ ~~réseaux avec~~ satisfaisant (3)$\}$ est un k-sch. projectif

Sachant cela, continuons.

Il existe $\quad 0 \to \Lambda' \to t^{-N} R'[[t]]^n \to Q' \to 0 \quad$ sur R'

avec $R' \subset R$ k-alg. noethérien redonnant (S) après $- \otimes_{R'} R$

On écrit:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda' & \to & t^{-N} R'[[t]]^n & \to & Q' & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \to & \Lambda'' & \to & t^{-N} R'[t]^n & \to & Q' & & \end{array}$$

et il reste à prouver que Λ'' est projectif sur $R'[t]$

$\iff$ Λ'' est plat sur $R'[t]$

et on utilise le critère de platitude par fibre

<u>Preuve de la proposition:</u> (cf (*))

Soit $\mathcal{R} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{R}_N$

C'est un ind-schéma projectif sur k $\simeq \mathrm{Grass}_{Gl_n}$

parce que: $V_N = t^{-N} k[[t]]^n / t^N k[[t]]^n \circlearrowleft t$ nilpotent, $1+t$ automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_N & \xhookrightarrow{\iota_N} & \mathrm{Grass}(V_N^*) \circlearrowleft 1+t \\ \downarrow \subseteq & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{N+1} & \xhookrightarrow{\iota_{N+1}} & \mathrm{Grass}(V_{N+1}^*) \circlearrowleft 1+t \end{array} \qquad \text{où } \iota_N(\Lambda) = t^{-N} R[[t]]^n / \Lambda$$

et l'image de ι_N est $\mathrm{Grass}(V_N^*)^{1+t}$ fermée dans $\mathrm{Grass}(V_N^*)$

Par le (2) du lemme, l'action $\quad LG(R) \to \mathcal{R}(R) \quad (G = Gl_n)$

$$g \mapsto g\Lambda_0$$

est fpqc-localement surjectif et le stabilisateur est $L^+G(R)$

d'où $\mathcal{R} \simeq LG / L^+G$.

Pour G quelconque, on a $G \hookrightarrow Gl_n$ avec Gl_n/G affine

Beilinson-Drinfeld montrent que $LG/L^+G \hookrightarrow LGl_n/L^+Gl_n$. $\square$

exemple:

$n=1$: $\quad Grass_{Gl_1}(R) = R((t))^\times / R[[t]]^\times$

$$R((t))^\times = \left\{ \sum_i a_i t^i \text{ tq } \exists i_0 \begin{array}{l} a_{i_0} \in R^\times \\ a_j \text{ nilpotent } \forall j < i_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l}\text{si } R \\ \text{est connexe}\end{array}$$

donc $Grass_{Gl_n}(R) = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{N \geq 0} \{ (a_1, \dots, a_N) \text{ avec } a_i \text{ nilpotent} \}$

pour R connexe

ce n'est pas réduit !

mais $Grass_{Gl_1}(k) \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \{*\}$

Remarque: $\pi_0 (Grass_{Gl_n}) \simeq X_*(T)/\mathbb{Z}\Phi^\vee = \mathbb{Z}^n / \{ \underline{x},\ \sum x_i = 0 \} \simeq \mathbb{Z}$

Remarque:

$K = Gl_n(\mathcal{O})$

$$X_*(T)_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \\ m_i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

On a: $Grass_{Gl_n}(k) = \coprod_{\mu \in X_{*,+}} K t^\mu K / K$ (décomposition de Cartan)

et $\overline{K \cdot t^\mu K/K} = \bigcup_{\lambda \leq \mu} K \cdot t^\lambda K / K$ variété projective de dim $S_\mu = |\langle 2\rho, \mu \rangle|$

variété de Schubert

où ρ est la demi-somme des racines positives.