

Allocation optimale de portefeuille 1/41

Saporta

Introduction

Motivation

iviou valio

Fonction

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilte

Résultats

Fonction Valeu
Une stratégie
efficace

Comparaison de stratégies

# Un problème d'allocation optimale de portefeuille avec coûts de transaction

## Benoîte de Saporta

INRIA Sophia Antipolis Projet OMEGA

CHRISTOPHETTE BLANCHET (Université de Nice)
RAJNA GIBSON (Université de Zurich)
ETIENNE TANRÉ et DENIS TALAY (INRIA Sophia Antipolis)

Séminaire Actuariat, Brest, 7 mars 2006



## Plan

Allocation optimale de portefeuille 2/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivatio

Fonction Valeur Principe de la Programmatio

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamiltor Jacobi Bellman

Resultats
numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison de

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- Cadre de travail
- Etude de la fonction Valeur
  - Principe de la Programmation Dynamique
  - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- Sésultats numériques
  - Fonction Valeur
  - Une stratégie efficace
  - Comparaison des stratégies



## Plan

Allocation optimale de portefeuille 3/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivatio

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

Résultats numérique

Fonction Valeu Une stratégie

> Comparaison des stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
  - Principe de la Programmation Dynamique
  - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- Résultats numériques
  - Fonction Valeur
  - Une stratégie efficace
  - Comparaison des stratégies



Allocation optimale de portefeuille 4/41

Introduction

- Variable d'état du système W<sub>t</sub> évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle  $\pi_t$ 
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information
  - influence la dynamique de W<sub>t</sub>
- Critère de performance  $J(W,\pi)$  à maximiser

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)



Allocation optimale de portefeuille 4/41

Introduction

 Variable d'état du système W<sub>t</sub> évoluant suivant une dynamique probabiliste

- Processus de contrôle  $\pi_t$ 
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W<sub>t</sub>
- Critère de performance  $J(W,\pi)$  à maximiser

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)



Allocation optimale de portefeuille 4/41

Introduction

 Variable d'état du système W<sub>t</sub> évoluant suivant une dynamique probabiliste

- Processus de contrôle  $\pi_t$ 
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W<sub>t</sub>
- Critère de performance  $J(W, \pi)$  à maximiser

### **Fonction Valeur**

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)



Allocation optimale de portefeuille 4/41

Introduction

- Variable d'état du système W<sub>t</sub> évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle  $\pi_t$ 
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W<sub>t</sub>
- Critère de performance  $J(W, \pi)$  à maximiser

### Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

## Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)



# Exemple : le problème de Merton

Allocation optimale de portefeuille 5/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Monvano

Fonction Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace

Marché : Actif sans risque  $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ 

Actif risqué  $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$ 

- Etat : richesse  $W_t = N_t S_t + N_t^0 dS_t^0$
- Contrôle : proportion de la richesse investie dans l'actif risqué  $\pi_t = \frac{N_t S_t}{W_t} \in [0; 1]$

Dynamique auto-financée :  $dW_t^{\pi} = N_t dS_t + N_t^0 dS_t^0$ 

$$\frac{dW_t^{\pi}}{W_t^{\pi}} = \frac{N_t S_t}{W_t^{\pi}} \frac{dS_t}{S_t} + \frac{N_t^0 S_t^0}{W_t^{\pi}} \frac{dS_t^0}{S_t^0}$$

$$= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0}$$

$$= (\pi_t \mu + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma dB_t$$



# Exemple : le problème de Merton Formulation II

Allocation optimale de portefeuille 6/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

iviolivatio

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamil Jacobi Bellman

roumériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison des

Critère : espérance de l'utilité de la richesse terminale

$$U(x) = x^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

#### Fonction valeur

$$V(t,x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

## **Objectif**

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)



## Exemple : le problème de Merton

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

Allocation optimale de portefeuille 7/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilte Jacobi Bellman

numériques Fonction Valeur

Une strategie efficace Comparaison des stratégies

## Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) + \sup_{p \in [0; 1]} \mathcal{L}^p \Phi(t, x) = 0$$
$$\Phi(T, x) = U(x) = x^{\alpha}$$

$$\mathcal{L}^{p}\Phi(t,x) = x(p\mu + (1-p)r)\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^{2}p^{2}x^{2}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}}(t,x)$$

On cherche une solution de la forme  $\Phi(t, x) = x^{\alpha} \varphi(t)$ 

$$0 = \varphi'(t) + \varphi(t) \sup_{\boldsymbol{p} \in [0;1]} \{ \alpha (\boldsymbol{p}\mu + (1-\boldsymbol{p})r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \boldsymbol{p}^2 \sigma^2 \}$$



# Exemple : le problème de Merton

Allocation optimale de portefeuille 8/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

iviotivatio

## Fonction

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto

#### Résultats

Fonction Valeu Une stratégie

> Comparaison des stratégies

Solution

## $\Phi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\alpha} \mathbf{e}^{\beta(T-t)}$

avec

$$\beta = \sup_{\boldsymbol{p} \in [0;1]} \{ \alpha (\boldsymbol{p}\mu + (1-\boldsymbol{p})r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \boldsymbol{p}^2 \sigma^2 \}$$
$$= \alpha r + \frac{\alpha(\mu-r)^2}{2(1-\alpha)\sigma^2}$$

atteint en 
$$p^* = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$$



## Exemple : le problème de Merton Interprétation de HJB

Allocation optimale de portefeuille 9/41

Introduction

Formule d'Itô pour  $\Phi$  entre t et T:

$$\begin{array}{ll} \Phi(T,W_T^{t,x,\pi}) & = & \Phi(t,x) + \int_t^T \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \mathcal{L}^{\pi_u}\Phi\Big)(u,W_u^{t,x,\pi})du \\ & + \text{martingale} \\ & \textcolor{red}{U(W_T^{t,x,\pi})} & \leq & \Phi(t,x) + \int_t^T \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sup_{p \in [0;1]} \mathcal{L}^p\Phi\Big)(u,W_u^{t,x,\pi})du \\ & + \text{martingale} \\ & \leq & \Phi(t,x) + \text{martingale} \end{array}$$

Donc

$$\Phi(t,x) \geq \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

avec égalité lorsque  $\pi_t = p^*$ 



# Exemple : le problème de Merton Conclusion

Allocation optimale de portefeuille 10/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivatio

....

## Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilton

#### Résultats

Fonction Vale

Comparaison de stratégies

### Conclusion

- $V(t,x) = x^{\alpha} e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant  $\pi_t = \frac{\mu r}{(1 \alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman



# Exemple : le problème de Merton Conclusion

Allocation optimale de portefeuille 10/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Caure

## Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto

#### Résultats

Fonction Vale
Une stratégie
efficace

Comparaison de stratégies

### Conclusion

- $V(t,x) = x^{\alpha} e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant  $\pi_t = \frac{\mu r}{(1 \alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman



## Nouveau problème

Allocation optimale de portefeuille 11/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

Cadre

Fonction
Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto

Résultats

numérique Fonction Valeu Une stratégie efficace

efficace Comparaison de stratégies Marché: Actif sans risque

Actif risqué

 $dS_t^0 = S_t^0 r dt$  $dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$ 

la dérive prend alternativement deux valeurs
 μ<sub>1</sub> < r < μ<sub>2</sub>

coûts de transaction



## Plan

Allocation optimale de portefeuille 12/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

iviolivatioi

Fonctior Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

Résultats

Fonction Valeu

emcace Comparaison de: stratégies Introduction au contrôle stochastique

2 Motivation

Cadre de travail

Etude de la fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies



## Motivation

Allocation optimale de portefeuille 13/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

iviouvano

Fonction Valeur Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

Résultats numériques Fonction Valeur Une stratégie efficace Comparaison des stratégies

### Investissement

- Approche fondamentale
  - principes économiques
- Analyse technique
  - comportement passé des prix
- Approche mathématique
  - modèles mathématiques

## Objectif

Comparer les performances de l'analyse technique et de l'approche mathématique



## Modélisation

Allocation optimale de portefeuille 14/41

Motivation

 $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ Actif sans risque Marché: Actif risqué  $dS_t = \mu(t)S_tdt + \sigma S_tdB_t$ 

- B mouvement Brownien standard,
- $\mu(t) \in \{\mu_1, \mu_2\}$  indépendant de B,
- contrôle  $\pi_t \in \{0,1\}$  proportion de la richesse investie dans l'actif risqué
- état  $W_t^{\pi}$  richesse correspondant à la stratégie  $\pi$
- critère espérance de l'utilité de la richesse finale

## Objectif

Maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse finale



## Stratégie de l'analyste technique

Allocation optimale de portefeuille 15/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

#### Fonctior Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamiltor
Jacobi Bellman

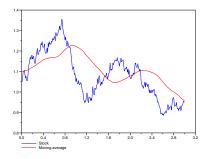
#### Résultats

Comparaison des

## Moyenne mobile

$$M_t^\delta = rac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t S_u du$$

- Si  $S_t > M_t^{\delta}$  achat
- Si  $S_t < M_t^{\delta}$  vente



$$\mu_1 = -0.2, \ \mu_2 = 0.2, \ \sigma = 0.15, \\ \delta = 0.8.$$

### Optimiser

- la taille de la fenêtre  $\delta$
- les instants de décision



## Stratégie de l'analyste technique

Allocation optimale de portefeuille

Benoîte de

Introduction

Motivation

### Fonction

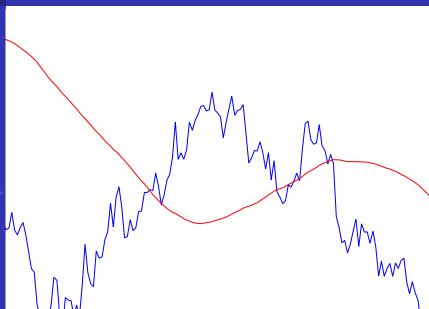
Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

#### Résultats

Fonction Vale

Comparaison des





# Travaux précédents

Allocation optimale de portefeuille 16/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

Mouvation

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt Jacobi Bellman

Résultats numériques Fonction Valeur Une stratégie efficace Comparaison de BLANCHET, DIOP, GIBSON, KAMINSKI, TALAY, TANRÉ (2005)

# Un seul changement de dérive

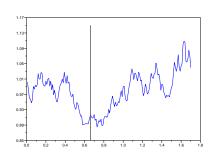
• 
$$\mu(t) = \mu_1 \text{ si } t < \tau$$

• 
$$\mu(t) = \mu_2 \text{ si } t \geq \tau$$

avec 
$$\mathbb{P}( au > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

## Stratégie

détecter au



$$\mu_1 = -0.2, \ \mu_2 = 0.2, \ \sigma = 0.15,$$
 $\lambda = 2.$ 



## Travaux précédents Résultats

Allocation optimale de portefeuille 17/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

iviotivatio

Fonction Valeur Principe de l Programmat

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

Résultats numériques Fonction Valeur Une stratégie efficace Etude théorique de la fonction valeur

Etude théorique de la détection de rupture

Comparaisons numériques des stratégies

- détection bien calibrée
- détection mal calibrée
- moyenne mobile

### Conclusion

- Moyenne mobile meilleure si paramètres mal calibrés
- Taux d'erreur à partir duquel c'est vrai



## Plan

Allocation optimale de portefeuille 18/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

Résultats

Fonction Valeu
Une stratégie

Comparaison des stratégies

- Introduction au contrôle stochastique
- Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
  - Principe de la Programmation Dynamique
  - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- Résultats numériques
  - Fonction Valeur
  - Une stratégie efficace
  - Comparaison des stratégies

## Nouveau modèle

Allocation optimale de portefeuille 19/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

### Cadre

#### Fonction Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto
Jacobi Bellman

#### numériques Fonction Valeur

Une stratégie efficace

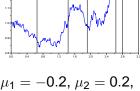
Comparaison des stratégies  Plusieurs changements de dérive

$$(\xi_{2n+1})$$
 iid Exp $(\lambda_1)$   
 $(\xi_{2n})$  iid Exp $(\lambda_2)$   
 $\tau_0 = 0, \, \tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ 

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{if } \tau_{2n} \le t < \tau_{2n+1} \\ \mu_2 & \text{if } \tau_{2n+1} \le t < \tau_{2n+2} \end{cases}$$



- g<sub>01</sub> coût d'achat
- g<sub>10</sub> coût de vente



$$\mu_1 = -0.2, \, \mu_2 = 0.2, \\ \sigma = 0.15, \, \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$



## Stratégies admissibles

Allocation optimale de portefeuille 20/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction

Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilt

numériques
Fonction Valeur

orie strategie efficace Comparaison des stratégies Contrôle :  $\pi_t \in \{0, 1\}$  proportion de la richesse investie dans l'actif risqué

$$\mathcal{F}_t^{S} = \sigma(S_u, u \leq t)$$

 $\pi_t$  doit être  $\mathcal{F}_t^{S}$ -adapté

#### Problème

$$\mathcal{F}_t^{S} \neq \mathcal{F}_t^{B} = \sigma(B_u, u \leq t)$$

⇒ Reformuler le problème de contrôle

## Filtrage

Allocation optimale de portefeuille 21/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivatio

Cadre

Fonction Valeur Principe de l

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

#### Résultats

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison des

Projection optionnelle :  $F_t = \mathbb{P}(\mu(t) = \mu_1 \mid \mathcal{F}_t^S)$ 

$$\overline{B}_t = \frac{1}{\sigma} \Big( \log \frac{S_t}{S_0} - \int_0^t \big( \mu_1 F_s + \mu_2 (1 - F_s) - \frac{\sigma^2}{2} \big) ds \Big)$$

## Proposition

- $\overline{B}$  est un  $(\mathcal{F}^S)$ -mouvement Brownien
- $\mathcal{F}^{S} = \mathcal{F}^{\overline{B}}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_1 F_t + \mu_2 (1 - F_t)) dt + \sigma d\overline{B}_t$$

## Kurtz, Ocone 1988

$$dF_t = \left(-\lambda_1 F_t + \lambda_2 (1 - F_t)\right) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t (1 - F_t) d\overline{B}_t$$



## Nouvelle formulation

Allocation optimale de portefeuille 22/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

numériques Fonction Valeur Une stratégie

efficace Comparaison des stratégies Contrôle :  $\pi_t$ 

Etat : couple  $(W_t, F_t)$ 

Dynamique:

$$\frac{dW_t^{\pi}}{W_{t^{-}}^{\pi}} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r)dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t 
- g_{01}\delta(\Delta \pi_t = 1) - g_{10}\delta(\Delta \pi_t = -1)$$

$$dF_t = \left(-\lambda_1 F_t + \lambda_2 (1 - F_t)\right) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t (1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité :  $U(x) = x^{\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0,1[$ 



## Nouvelle formulation

Allocation optimale de portefeuille 22/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

numériques Fonction Valeur Une stratégie

efficace Comparaison des stratégies Contrôle :  $\pi_t$ 

Etat : couple  $(W_t, F_t)$ 

Dynamique:

$$\frac{dW_{t}^{\pi}}{W_{t-}^{\pi}} = (\pi_{t}(\mu_{1}F_{t} + \mu_{2}(1 - F_{t})) + (1 - \pi_{t})r)dt + \pi_{t}\sigma d\bar{B}_{t} 
- g_{01}\delta(\Delta\pi_{t} = 1) - g_{10}\delta(\Delta\pi_{t} = -1)$$

$$dF_t = \left(-\lambda_1 F_t + \lambda_2 (1 - F_t)\right) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t (1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité :  $U(x) = x^{\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0,1[$ 



## Nouvelle formulation

Allocation optimale de portefeuille 22/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

numériques Fonction Valeur Une stratégie

efficace Comparaison des stratégies Contrôle :  $\pi_t$ 

Etat : couple  $(W_t, F_t)$ 

Dynamique:

$$\frac{dW_t^{\pi}}{W_{t^-}^{\pi}} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r)dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t \\
- g_{01}\delta(\Delta \pi_t = 1) - g_{10}\delta(\Delta \pi_t = -1)$$

$$dF_t = \left(-\lambda_1 F_t + \lambda_2 (1 - F_t)\right) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t (1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité :  $U(x) = x^{\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0,1[$ 



## Plan

Allocation optimale de portefeuille 23/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivatio

Fonction

#### Fonction Valeur

Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto
Jacobi Bellman

Résultats numérique

Fonction Valeu
Une stratégie

Comparaison de stratégies

- Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
  - Principe de la Programmation Dynamique
  - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- Résultats numériques
  - Fonction Valeur
  - Une stratégie efficace
  - Comparaison des stratégies



## Définition

Allocation optimale de portefeuille 24/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

## Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

#### Résultats

Fonction Valer
Une stratégie

Comparaison de stratégies Si  $\pi_{t^-}=0$ 

$$J^{0}(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{\pi}) \mid W_{t^{-}}^{\pi} = x, F_{t} = f]$$

Si 
$$\pi_{t^-}=1$$

$$J^{1}(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{\pi}) \mid W_{t^{-}}^{\pi} = x, F_{t} = f]$$

#### Fonction valeur

$$V^{0}(t, x, f) = \sup_{\pi} J^{0}(t, x, f, \pi)$$
  
 $V^{1}(t, x, f) = \sup_{\pi} J^{1}(t, x, f, \pi)$ 



## MINRIA Comparaison

Allocation optimale de portefeuille 25/41

#### Fonction Valeur

 $\pi$  contrôle quelconque tel que  $\pi_{t-}=1$  $\hat{\pi}$  tel que

- $\hat{\pi}_{t^{-}} = 0$
- $\hat{\pi}_u = \pi_u$  pour tout  $u \geq t$

Alors

$$W_T^{t,\mathbf{x},f,\hat{\pi}} = W_T^{t,(1-g_{01})\mathbf{x},f,\pi}$$

Donc

$$V^0(t,x,f) \ge J^0(t,x,f,\hat{\pi}) = J^1(t,(1-g_{01})x,f,\pi)$$

## **Proposition**

$$V^{0}(t,x,f) \geq V^{1}(t,(1-g_{01})x,f)$$
  
 $V^{1}(t,x,f) > V^{0}(t,(1-g_{10})x,f)$ 

Benoîte de Saporta

Introductio

Matication

Caure

#### Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

#### Résultats

Fonction Vale Une stratégie

Comparaison des

## Proposition

Pour tous  $i \in \{0; 1\}$ 

$$0 \leq t, \hat{t} \leq T$$

$$x, \hat{x} > 0$$

$$0 < f, \hat{f} < 1$$
:

$$\begin{aligned} \left| V^{i}(\hat{t}, \hat{x}, \hat{f}) - V^{i}(t, x, f) \right| \\ &\leq C(1 + x^{\alpha - 1} + \hat{x}^{\alpha - 1}) (|\hat{x} - x| + x(|\hat{f} - f| + |\hat{t} - t|^{1/2})) \end{aligned}$$



## Principe de la Programmation Dynamique

Allocation optimale de portefeuille 27/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

#### Résultats

Fonction Valer
Une stratégie

Comparaison des stratégies

## Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous  $0 \le s \le t \le T$  et x, f, i:

$$V^{i}(s, x, t) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, x, f, \pi}, F_{t}^{s, t})]$$

#### Preuve:

$$J^{i}(s, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi}) \mid \mathcal{F}_{s, t}]]$$

$$= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f}, \pi)]$$

$$\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f})]$$



## Principe de la Programmation Dynamique

Allocation optimale de portefeuille 27/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hami

Résultats

Fonction Valeu
Une stratégie
efficace

Comparaison des stratégies

## Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous  $0 \le s \le t \le T$  et x, f, i:

$$V^{i}(s, x, t) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, x, t, \pi}, F_{t}^{s, t})]$$

#### Preuve:

$$J^{i}(s, \mathbf{x}, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{s, \mathbf{x}, f, \pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}) \mid \mathcal{F}_{s, t}]]$$

$$= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f}, \pi)]$$

$$\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f})]$$



## Principe de la Programmation Dynamique

Allocation optimale de portefeuille 27/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamil

numérique Fonction Vale Une stratégie

efficace Comparaison des stratégies

## Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous  $0 \le s \le t \le T$  et x, f, i:

$$V^{i}(s, x, t) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, x, t, \pi}, F_{t}^{s, t})]$$

#### Preuve:

$$J^{i}(s, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi}) \mid \mathcal{F}_{s, t}]]$$

$$= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f}, \pi)]$$

$$\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f})]$$



## **NINRIA** Principe de la Programmation Dynamique

Allocation optimale de portefeuille 27/41

Principe de la Programmation Dynamique

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous 0 < s < t < T et x, f, i:

$$V^{i}(s, x, t) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, x, t, \pi}, F_{t}^{s, t})]$$

Preuve:

$$J^{i}(s, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi}) \mid \mathcal{F}_{s, t}]]$$

$$= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f}, \pi)]$$

$$\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, \mathcal{F}_{t}^{s, f})]$$



## **NINRIA** Principe de la Programmation Dynamique

Allocation optimale de portefeuille 27/41

Principe de la Programmation

### Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous 0 < s < t < T et x, f, i:

$$V^{i}(s, x, t) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, x, t, \pi}, F_{t}^{s, t})]$$

#### Preuve:

$$J^{i}(s, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s, x, f, \pi}) \mid \mathcal{F}_{s, t}]]$$

$$= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, F_{t}^{s, f}, \pi)]$$

$$\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, x, f, \pi}, F_{t}^{s, f})]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Valeur

Principe de la

Programmation

Dynamique

Equations d'Hami

Jacobi Bellman

Résultats

Fonction Valeu
Une stratégie
efficace

 $\pi$  fixe tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t)] \le \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t)]$$

pour tout i, pour tous (x, f) et  $(\hat{x}, \hat{t})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^{i}(t,x,f)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{t})|\leq \varepsilon,\ |J^{i}(t,x,f,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{t},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-1}}(t, W_{t-1}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \mathbb{1}_{(W_{t-1}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p) \mathbb{1}_{(W_{t-}^{s, \mathsf{x}, t, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Principe de la Programmation

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t)] \le \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t)]$$

pour tout *i*, pour tous  $(x, \hat{t})$  et  $(\hat{x}, \hat{t})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^{i}(t,x,f)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^{i}(t,x,f,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-1}}(t, W_{t-1}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \mathbb{1}_{(W_{t-1}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s, \mathbf{x}, t, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Principe de la Programmation

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t-}, \mathcal{F}^{s,f}_t)] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t-}, \mathcal{F}^{s,f}_t)]$$

$$|V^{i}(t,x,t)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{t})| \leq \varepsilon, \ |J^{i}(t,x,t,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{t},\pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \mathbb{1}_{(W_{t^{-}}^{s,x,f,\pi}, F_{t}^{s,f}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}}}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \mathbf{1}_{(W^{s, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Principe de la Programmation

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t-}, F^{\mathbf{s}, f}_{t})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t-}, F^{\mathbf{s}, f}_{t})]$$

$$|V^{i}(t,x,f)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^{i}(t,x,f,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{\mathbf{s}, f}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{\mathbf{s}, f}) \in \mathcal{B}_{\mathcal{P}}}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s, \mathsf{x}, t, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamill

Résultats

rumériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison de
stratégies

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t})]$$

 $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$  partition de ]0;  $+\infty[\times[0;1]$  telle que pour tout i, pour tous (x,f) et  $(\hat{x},\hat{f})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^i(t,x,f)-V^i(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^i(t,x,f,\pi)-J^i(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq arepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t-}, \mathcal{F}^{\mathbf{s}, f}_{t}) \mathbb{1}_{(W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t-}, \mathcal{F}^{\mathbf{s}, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}) \mathbb{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Valeur Principe de la Programmation Dynamique

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)]$$

 $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$  partition de ]0;  $+\infty[\times[0;1]$  telle que pour tout i, pour tous (x,f) et  $(\hat{x},\hat{f})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^i(t,x,f)-V^i(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^i(t,x,f,\pi)-J^i(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t) \mathbf{1}_{(W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p) \mathbb{1}_{(W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t-}, F^{\mathbf{s}, f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison d

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)]$$

 $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$  partition de ]0;  $+\infty[\times[0;1]$  telle que pour tout i, pour tous (x,f) et  $(\hat{x},\hat{f})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^{i}(t,x,f)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^{i}(t,x,f,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, \boldsymbol{W_{t^-}^{s,x,f,\pi}}, \boldsymbol{F_t^{s,f}}) \boldsymbol{1}_{(\boldsymbol{W_{t^-}^{s,x,f,\pi}}, \boldsymbol{F_t^{s,f}}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p) \mathbb{1}_{(W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison d

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)]$$

 $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$  partition de ]0;  $+\infty[\times[0;1]$  telle que pour tout i, pour tous (x,f) et  $(\hat{x},\hat{f})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^i(t,x,f) - V^i(t,\hat{x},\hat{f})| \leq \varepsilon, \ |J^i(t,x,f,\pi) - J^i(t,\hat{x},\hat{f},\pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t) \mathbf{1}_{(W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \mathbb{1}_{(W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 28/41

Principe de la Programmation

 $\pi$  fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t)]$$

 $(\mathcal{B}_p)_{p\in\mathbb{N}}$  partition de  $]0; +\infty[\times[0;1]$  telle que pour tout *i*, pour tous (x, f) et  $(\hat{x}, \hat{f})$  dans  $\mathcal{B}_p$  et pour tout  $\pi$ :

$$|V^{i}(t,x,f)-V^{i}(t,\hat{x},\hat{f})|\leq \varepsilon,\ |J^{i}(t,x,f,\pi)-J^{i}(t,\hat{x},\hat{f},\pi)|\leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, \boldsymbol{W_{t^-}^{s,x,f,\pi}}, \boldsymbol{F_t^{s,f}}) \boldsymbol{1}_{(\boldsymbol{W_{t^-}^{s,x,f,\pi}}, \boldsymbol{F_t^{s,f}}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p) \mathbf{1}_{(W^{s, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^-}, F^{s, f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 29/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadr

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamil

esultats

Fonction Valeu Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p})\mathbf{1}_{(W^{s, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$V^{i}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}) \leq \varepsilon + J^{i}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p, \pi_{t-}}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{\mathbf{s}, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{\mathbf{s}, f}, \pi^{p, \pi_{t-}}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{\mathbf{s}, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$



Allocation optimale de portefeuille 29/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadr

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamil

esultats

Fonction Valeu Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{V}^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p})\mathbf{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$V^{i}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}) \leq \varepsilon + J^{i}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, \mathbf{x}_p, f_p, \pi^{p, \pi_{t-}}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{s, f}, \pi^{p, \pi_{t-}}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_t^{s, f}) \in \mathcal{B}_p}]$$



Allocation optimale de portefeuille 29/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Mouvau

Codro

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

numeriques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace

Comparaison des stratégies

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{oldsymbol{p}=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, \mathbf{x}_{oldsymbol{p}}, f_{oldsymbol{p}}) \mathbf{1}_{(W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^-}, F^{\mathbf{s}, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{oldsymbol{p}}}]$$

$$V^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \leq \varepsilon + J^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W^{s, x, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, W^{s, x, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W^{s, x, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$



Allocation optimale de portefeuille 29/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

Jacobi Bellili

rumériques Fonction Valeur Une stratégie efficace

efficace Comparaison des stratégies

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[\frac{\mathbf{V}^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p})}{(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p})}]_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$V^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \leq \varepsilon + J^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$



Allocation optimale de portefeuille 29/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

Résultats

Fonction Valeur
Une stratégie
efficace

епісасе Comparaison des stratégies

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, \mathbf{f}_{p})\mathbf{1}_{(W^{s, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^{-}}, F^{s, f}_{t}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$V^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p) \leq \varepsilon + J^i(t, \mathbf{x}_p, \mathbf{f}_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, \mathbf{x}_{p}, f_{p}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}, \pi^{p, \pi_{t^{-}}}) \mathbf{1}_{(W_{t^{-}}^{s, \mathbf{x}, f, \pi}, F_{t}^{s, f}) \in \mathcal{B}_{p}}]$$



Allocation optimale de portefeuille 30/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Ham

#### lesultats

Fonction Vale
Une stratégie

Comparaison des stratégies

# $\mathcal{V} \leq 4\varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, F^{s,f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$

#### On recolle

$$oldsymbol{\hat{\pi}}_{oldsymbol{u}} = \left\{ egin{array}{ll} \pi_u & ext{si } s \leq u < t \ \pi_u^{oldsymbol{
ho}, \hat{oldsymbol{\pi}}_{t-}} & ext{si } u \geq t, \ ext{et} \left(W_{t-}^{oldsymbol{s}, x, f, \hat{oldsymbol{\pi}}}, F_t^{oldsymbol{s}, f} 
ight) \in \mathcal{B}_{oldsymbol{p}} \end{array} 
ight.$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{C} & \leq & 4\varepsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_{t}^{s,f}, \hat{\pi})] \\
& = & 4\varepsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\
& = & 4\varepsilon + \mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}})] \\
& \leq & 4\varepsilon + \mathbb{E}[V^{i}(s,x,f)]
\end{array}$$



Allocation optimale de portefeuille 30/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Ham

#### Resultats

Fonction Val

Comparaison des stratégies  $\mathcal{V} \leq 4\varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^-}, F^{\mathbf{s}, f}_t, \pi^{\mathbf{p}, \pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W^{\mathbf{s}, \mathbf{x}, f, \pi}_{t^-}, F^{\mathbf{s}, f}_t) \in \mathcal{B}_{\mathbf{p}}}]$ 

#### On recolle

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{u}} = \left\{ \begin{array}{ll} \pi_{\boldsymbol{u}} & \text{si s} \leq \boldsymbol{u} < t \\ \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{\pi}}_{t^{-}}} & \text{si } \boldsymbol{u} \geq t, \text{ et } (W_{t^{-}}^{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}, f, \hat{\boldsymbol{\pi}}}, \boldsymbol{F}_{t}^{\boldsymbol{s}, f}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{V} \leq 4\varepsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_{t}^{s,f}, \hat{\pi})] 
= 4\varepsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] 
= 4\varepsilon + \mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}})] 
\leq 4\varepsilon + \mathbb{E}[V^{i}(s,x,f)]$$



Allocation optimale de portefeuille 30/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Ham

#### Resultats

Fonction Vale

Comparaison de stratégies

# $\mathcal{V} \leq 4\varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, \mathcal{F}^{s,f}_t, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W^{s,x,f,\pi}_{t^-}, \mathcal{F}^{s,f}_t) \in \mathcal{B}_p}]$

#### On recolle

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{u}} = \begin{cases} \pi_{\boldsymbol{u}} & \text{si } \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{u} < \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{p}, \hat{\boldsymbol{\pi}}_{t^{-}}} & \text{si } \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{t}, \text{ et } (W_{t^{-}}^{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x}, f, \hat{\boldsymbol{\pi}}}, F_{t}^{\boldsymbol{s}, f}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{p}} \end{cases}$$

$$\mathcal{V} \leq 4\varepsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^{-}}}(t, W_{t^{-}}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_{t}^{s,f}, \hat{\pi})] 
= 4\varepsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] 
= 4\varepsilon + \mathbb{E}[U(W_{T}^{s,x,f,\hat{\pi}})] 
\leq 4\varepsilon + \mathbb{E}[V^{i}(s,x,f)]$$



## Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Allocation optimale de portefeuille 31/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction Valeur Principe de l

Programmation Dynamique Equations d'Hamilton

#### Résultats

Fonction Valeu
Une stratégie
efficace

efficace Comparaison des stratégies

### Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left\{ -\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \mathcal{L}^0 \varphi^0; \; \varphi^0(t, x, f) - \varphi^1(t, x(1 - g_{01}), f) \right\} = 0 \\ \min \left\{ -\frac{\partial \varphi^1}{\partial t} - \mathcal{L}^1 \varphi^1; \; \varphi^1(t, x, f) - \varphi^0(t, x(1 - g_{10}), f) \right\} = 0 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}^{0}\varphi(t,x,f) = xr\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x,f) + \left(-\lambda_{1}f + \lambda_{2}(1-f)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial f}(t,x,f) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{1}-\mu_{2}}{\sigma}\right)^{2}f^{2}(1-f)^{2}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial f^{2}}(t,x,f)$$

$$\mathcal{L}^{1}\varphi(t,x,f) = x(\mu_{1}f + \mu_{2}(1-f))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x,f) + \frac{1}{2}x^{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x^{2}}(t,x,f)$$

$$+ (-\lambda_{1}f + \lambda_{2}(1-f))\frac{\partial\varphi}{\partial f}(t,x,f) + x(\mu_{1} - \mu_{2})f(1-f)\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial x\partial f}(t,x,f)$$

$$+ \frac{1}{2}(\frac{\mu_{1} - \mu_{2}}{\sigma})^{2}f^{2}(1-f)^{2}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial f^{2}}(t,x,f)$$



## MINRIA Solution de viscosité

Allocation optimale de portefeuille 32/41

Equations d'Hamilton

 $F(t, x, v(t, x), D_t v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)) = 0$ (P)

#### Définition

v est sous-solution de viscosité de (P) si

$$F(\bar{t},\bar{x},v(\bar{t},\bar{x}),D_t\varphi(\bar{t},\bar{x}),D\varphi(\bar{t},\bar{x}),D^2\varphi(\bar{t},\bar{x}))\leq 0$$

pour tous  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$  et toute fonction  $\varphi$   $C^{1,2}$  tels que  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$  est un maximum local de  $v - \varphi$ 

v est sur-solution de viscosité de (P) si

$$F(\bar{t},\bar{x},v(\bar{t},\bar{x}),D_t\varphi(\bar{t},\bar{x}),D\varphi(\bar{t},\bar{x}),D^2\varphi(\bar{t},\bar{x}))\geq 0$$

pour tous  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$  et toute fonction  $\varphi$   $C^{1,2}$  tels que  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$  est un minimum local de  $v - \varphi$ 



### Caractérisation de la fonction valeur

Allocation optimale de portefeuille 33/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

Cadre

Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilton

numériques
Fonction Valeur

efficace Comparaison des stratégies  $\mathcal{V}_{\alpha}$ : ensemble des  $\varphi$  continues sur [0; T]  $\times$  [0;  $+\infty$ [ $\times$ [0; 1] telles que  $\varphi(t,0,f)=0$  et

$$\sup_{[0;T]\times]0;+\infty[^2\times[0;1]^2}\frac{|\varphi(t,x,f)-\varphi(t,\hat{x},\hat{f})|}{(1+x^{\alpha-1}+\hat{x}^{\alpha-1})(|x-\hat{x}|+x|f-\hat{f}|)}<\infty.$$

#### Théorème

 $(V^0, V^1)$  est l'unique solution de viscosité de HJB sur  $\mathcal{V}_{\alpha} \times \mathcal{V}_{\alpha}$  vérifiant

$$V^{0}(T, x, f) = V^{1}(T, x, f) = U(x) = x^{\alpha}$$



### Plan

Allocation optimale de portefeuille 34/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivatio

iviotivatio

Fonction Valeur Principe de la

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto Jacobi Bellman

Résultats numériques

> onction Val ne stratégi ficace

efficace Comparaison des stratégies

- Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
  - Principe de la Programmation Dynamique
  - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 6 Résultats numériques
  - Fonction Valeur
  - Une stratégie efficace
  - Comparaison des stratégies



## Discrétisation

Allocation optimale de portefeuille 35/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

#### Fonction Valeur Principe de Programma

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

#### Résultats

Fonction Valeur Une stratégie

Comparaison de stratégies

### Dépendance en x :

$$V^{i}(t,x,f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_{T}^{t,x,f,\pi})] = x^{\alpha} V^{i}(t,1,f)$$

### Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer  $\overline{V^0}(t,\cdot)$  et  $\overline{V^1}(t,\cdot)$  à partir de  $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$  et  $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison

• si 
$$\overline{V^0}(t,f) \ge (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$$
, prendre  $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$  sinon  $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$ 

• si 
$$V^1(t,f) \ge (1-g_{10})^{\alpha} V^0(t,f)$$
, prendre  $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1(t,f)}$  sinon  $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^{\alpha} \overline{V^0(t,f)}$ 



### Discrétisation

Allocation optimale de portefeuille 35/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Cadr

Fonction Valeur Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamil

numériques
Fonction Valeur
Une stratégie

Comparaison des stratégies

### Dépendance en x :

$$V^{i}(t,x,f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_{T}^{t,x,f,\pi})] = x^{\alpha} V^{i}(t,1,f)$$

### Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer  $\overline{V^0}(t,\cdot)$  et  $\overline{V^1}(t,\cdot)$  à partir de  $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$  et  $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison
  - si  $\overline{V^0}(t,f) \ge (1-g_{01})^{\alpha} \overline{V^1}(t,f)$ , prendre  $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$  sinon  $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^{\alpha} \overline{V^1}(t,f)$
  - si  $V^1(t,f) \ge (1-g_{10})^{\alpha} V^0(t,f)$ , prendre  $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1}(t,f)$  sinon  $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^{\alpha} \overline{V^0}(t,f)$



### Discrétisation

Allocation optimale de portefeuille 35/41

Benoîte de Saporta

Introductio

Motivation

Cadre

Fonction
Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilto
Jacobi Bellman

Résultats numériques Fonction Valeur Une stratégie efficace

### Dépendance en x :

$$V^{i}(t,x,f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_{T}^{t,x,f,\pi})] = x^{\alpha} V^{i}(t,1,f)$$

### Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer  $\overline{V^0}(t,\cdot)$  et  $\overline{V^1}(t,\cdot)$  à partir de  $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$  et  $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison
  - si  $\overline{V^0}(t,f) \ge (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$ , prendre  $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$  sinon  $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$
  - si  $\overline{V^1}(t,f) \ge (1-g_{10})^{\alpha} \overline{V^0}(t,f)$ , prendre  $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1}(t,f)$  sinon  $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^{\alpha} \overline{V^0}(t,f)$



## Fonction valeur $V^0$

Allocation optimale de portefeuille 36/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Code

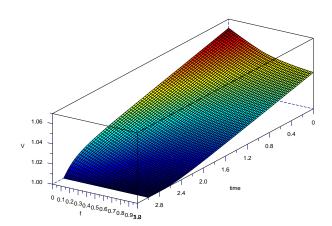
#### Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

#### Résultats

Fonction Valeur Une stratégie efficace

efficace Comparaison des stratégies Paramètres : T=3,  $\mu_2=-\mu_1=0.2$ ,  $\lambda_1=\lambda_2=2$ ,  $\sigma=0.15$ ,  $g_{01}=g_{10}=0.001$ 





## Fonction valeur V<sup>0</sup> Régularité I

Allocation optimale de portefeuille 37/41

Benoîte de

Introductio

Motivatio

Monvano

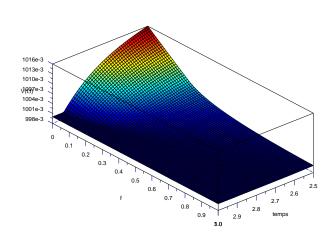
Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilt

#### Résultats

Fonction Valeur Une stratégie efficace

Comparaison de stratégies Coûts de transaction  $g_{01} = g_{10} = 0.01$ Zoom entre t = 2.5 et t = 3 = T





## Fonction valeur $V^0$ Régularité II

Allocation optimale de portefeuille 38/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivatio

iviouvano

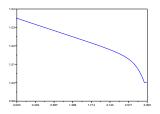
#### Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilto

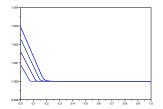
#### Résultats

Fonction Valeur Une stratégie

efficace Comparaison d stratégies Coupe en f = 0.05



Coupes en t = 2.90, t = 2.91, t = 2.92, t = 2.93,





## Stratégie efficace

Allocation optimale de portefeuille 39/41

Benoîte d Saporta

Introduction

Motivation

Monvanoi

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique Equations d'Hamilte Jacobi Bellman

#### Résultats

Fonction Valeur Une stratégie efficace

Comparaison des

Calculer V

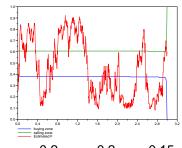
0, V

1

- Estimer  $\hat{F}_t$
- Comparer  $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$  et  $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$ :
- achat si  $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t) = (1 g_{01})^{\alpha} \hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$

vente si

$$\hat{V}^{1}(t,\hat{F}_{t}) = (1 - g_{10})^{\alpha} \hat{V}^{0}(t,\hat{F}_{t})$$





## Comparaison stratégie efficace/ fonction valeur

Allocation optimale de portefeuille 40/41

Benoîte d Saporta

Introductio

Cadra

Fonction
Valeur
Principe de la
Programmation
Dynamique
Equations d'Hamilt
Jacobi Bellman

Résultats
numériques
Fonction Valeur
Une stratégie
efficace
Comparaison de

Calcul de la fonction valeur :

- pas de discrétisation en temps 10<sup>-6</sup>
- pas de discrétisation en espace 10<sup>-3</sup>
- 10<sup>5</sup> simulations de Monte Carlo de la stratégie efficace

$F_0$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\hat{V}^0$	1.061	1.057	1.053	1.049	1.045	1.043
Stratégie	1.061	1.056	1.052	1.049	1.045	1.043

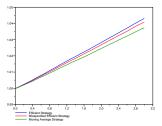
$F_0$	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\hat{V}^0$	1.041	1.039	1.038	1.037	1.036
Stratégie	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036

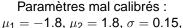


## Comparaison stratégie mal calibrée / Moyenne mobile

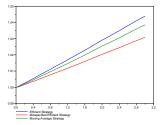
Allocation optimale de portefeuille 41/41

Comparaison des





-1.8, 
$$\mu_2 =$$
 1.8,  $\sigma =$  0.1  $\lambda_1 =$  4,  $\lambda_2 =$  4



Paramètres mal calibrés :

$$\mu_1 = -1.8, \, \mu_2 = 1.8, \, \sigma = 0.25, \\ \lambda_1 = 4, \, \lambda_2 = 4$$

Vrais paramètres :  $\mu_1 = -0.2$ ,  $\mu_2 = 0.2$ ,  $\sigma = 0.15$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2, T = 3, \delta = 0.8$ 100000 simulations Monte Carlo