

Comprendre et décider dans l'incertain

Quelques exemples de contributions de la recherche en mathématiques à des problèmes concrets

Benoîte de Saporta



Plan de l'exposé

Mon parcours

Exemples d'applications de la recherche en mathématiques

Economie

Biologie

Fiabilité

Aide à la décision

Conclusion

Mon parcours

Etudes

- ▶ 1995 Bac S, Marseille spécialité maths

Mon parcours

Etudes

- ▶ 1995 Bac S, Marseille spécialité maths
- ▶ 1995-1997 Classes préparatoires MPSI, MP*, Marseille

Mon parcours

Etudes

- ▶ 1995 Bac S, Marseille spécialité maths
- ▶ 1995-1997 Classes préparatoires MPSI, MP*, Marseille
- ▶ 1997-2001 Ecole Normale Supérieure, Lyon
 - ▶ licence de maths
 - ▶ maîtrise de maths
 - ▶ agrégation de maths, option probabilité

Mon parcours

Etudes

- ▶ 1995 Bac S, Marseille spécialité maths
- ▶ 1995-1997 Classes préparatoires MPSI, MP*, Marseille
- ▶ 1997-2001 Ecole Normale Supérieure, Lyon
 - ▶ licence de maths
 - ▶ maîtrise de maths
 - ▶ agrégation de maths, option probabilité
- ▶ 2000-2004 Université de Rennes 1, Rennes
 - ▶ DEA de mathématiques appliquées, parcours probabilité
 - ▶ doctorat, mention mathématiques et applications
Etude de la solution stationnaire de l'équation
$$X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1} \text{ à coefficients aléatoires}$$

Mon parcours

Parcours professionnel

- ▶ 2004-2005 ATER Université de Nantes,

Mon parcours

Parcours professionnel

- ▶ 2004-2005 ATER Université de Nantes,
- ▶ 2005-2006 Post-doctorat Inria, Sophia Antipolis

Mon parcours

Parcours professionnel

- ▶ 2004-2005 ATER Université de Nantes,
- ▶ 2005-2006 Post-doctorat Inria, Sophia Antipolis
- ▶ 2006-2014 Maître de conférence Université de Bordeaux
 - ▶ Membre de l'équipe Inria CQFD
 - ▶ 2013 Habilitation à diriger des recherches
Contributions à l'estimation et au contrôle de processus stochastiques

Mon parcours

Parcours professionnel

- ▶ 2004-2005 ATER Université de Nantes,
- ▶ 2005-2006 Post-doctorat Inria, Sophia Antipolis
- ▶ 2006-2014 Maître de conférence Université de Bordeaux
 - ▶ Membre de l'équipe Inria CQFD
 - ▶ 2013 Habilitation à diriger des recherches
Contributions à l'estimation et au contrôle de processus stochastiques
- ▶ depuis 2014 Professeure des Universités Université de Montpellier

Le métier d'enseignante chercheuse

▶ Enseignement

- ▶ préparation des cours, TD
- ▶ faire **cours**, TD
- ▶ examens, corrections

Le métier d'enseignante chercheuse

▶ Enseignement

- ▶ préparation des cours, TD
- ▶ faire **cours**, TD
- ▶ examens, corrections

▶ Recherche

- ▶ *faire des théorèmes*, écrire des **articles**
- ▶ **encadrement** de projets, stages, thèses
- ▶ **collaborations** locales, nationales, internationales
- ▶ exposés, conférences
- ▶ évaluations, jurys
- ▶ recherche de **financements**, contrats

Le métier d'enseignante chercheuse

▶ Enseignement

- ▶ préparation des cours, TD
- ▶ faire **cours**, TD
- ▶ examens, corrections

▶ Recherche

- ▶ *faire des théorèmes*, écrire des **articles**
- ▶ **encadrement** de projets, stages, thèses
- ▶ **collaborations** locales, nationales, internationales
- ▶ exposés, conférences
- ▶ évaluations, jurys
- ▶ recherche de **financements**, contrats

▶ Responsabilités administratives

- ▶ gestion d'un parcours de master
- ▶ participation aux **conseils** du département, du laboratoire, de l'école doctorale, d'un labex
- ▶ organisation de **conférences**

Plan de l'exposé

Mon parcours

Exemples d'applications de la recherche en mathématiques

Economie

Biologie

Fiabilité

Aide à la décision

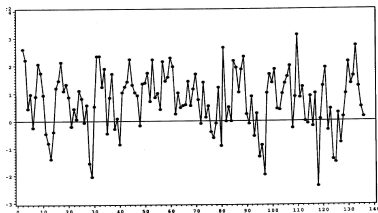
Conclusion

Processus Auto-Régressifs à régime markovien

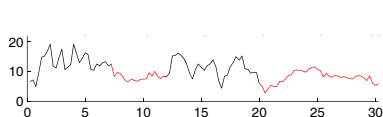
Modèle $X_{n+1} = a_{n+1}X_n + b_{n+1}$

- ▶ (a_n) chaîne de Markov à espace d'états fini
- ▶ (b_n) bruit iid

Exemples Economie, données climatiques



Variation semestrielle du PIB
américain entre 1951 et 1984
Régime 1 : croissance,
Régime 2 : récession



Intensité du vent en janvier 1991 au
large de La Rochelle



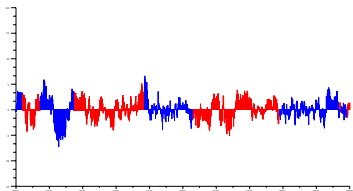
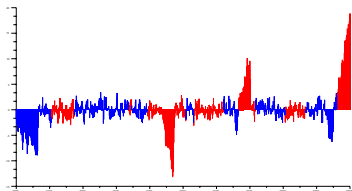
Régime 1 : anticyclonique,
Régime 2 : sud ouest perturbé

Question mathématique

Problème ouvert

Fréquence des événements extrêmes

$$\mathbb{P}(X_\infty > t) \sim Ct^{-\kappa} \text{ ou } \mathbb{P}(X_\infty > t) \sim Ce^{-\kappa t} ?$$



Résultats de ma thèse

Théorème

- ▶ Conditions suffisantes sur (a_n, b_n) pour l'existence d'une décroissance polynomiale
- ▶ Caractérisation de l'exposant κ comme solution d'une équation en les paramètres du modèle (probabilités de passer d'un régime à un autre)

Résultats de ma thèse

Théorème

- ▶ Conditions suffisantes sur (a_n, b_n) pour l'existence d'une décroissance polynomiale
- ▶ Caractérisation de l'exposant κ comme solution d'une équation en les paramètres du modèle (probabilités de passer d'un régime à un autre)

Application en économie [Benhabib & al. 2015]

Augmenter les impôts sur les revenus du capital et les droits de succession réduit les inégalités (= fait baisser l'exposant κ).

Plan de l'exposé

Mon parcours

Exemples d'applications de la recherche en mathématiques

Economie

Biologie

Fiabilité

Aide à la décision

Conclusion

Expérience 1

Données



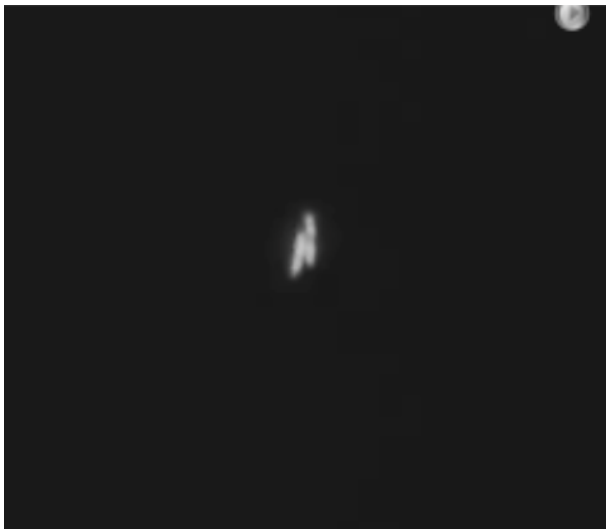
Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



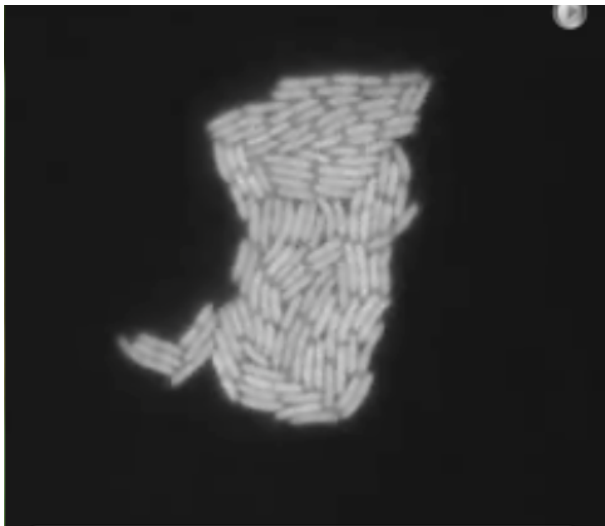
Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



Expérience 1

Données



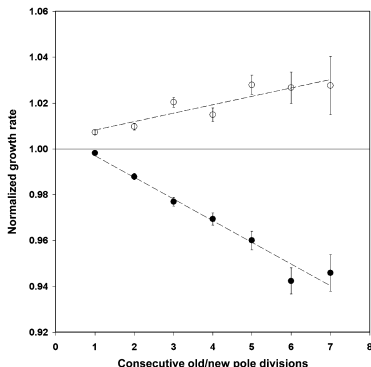
Expérience 1

Données



Expérience 1

Constat des biologistes [Stewart & al. 2005]



Question mathématique

La différence est-elle statistiquement significative si on prend en compte les dépendances généalogiques ?

Réponse mathématique

- ▶ Proposition et étude des propriétés statistiques d'un **nouveau modèle** auto-régressif sur arbre binaire
[Guyon 2007], [Bercu, dS, Gégout-Petit 2009]

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

Réponse mathématique

- ▶ Proposition et étude des propriétés statistiques d'un **nouveau modèle** auto-régressif sur arbre binaire
[Guyon 2007], [Bercu, dS, Gégout-Petit 2009]

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

- ▶ Confrontation aux données biologiques : **impossible** car données manquantes

Réponse mathématique

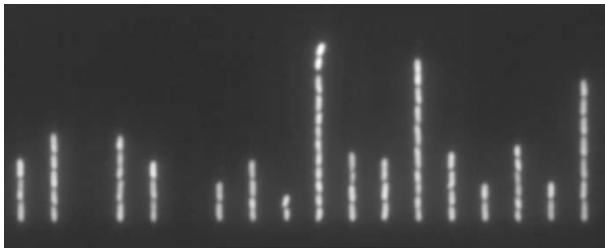
- ▶ Proposition et étude des propriétés statistiques d'un **nouveau modèle** auto-régressif sur arbre binaire
[Guyon 2007], [Bercu, dS, Gégout-Petit 2009]

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

- ▶ Confrontation aux données biologiques : **impossible** car données manquantes
- ▶ Prise en compte mathématique d'un **schéma d'observations partielles** [dS, Gégout-Petit, Marsalle 2011]

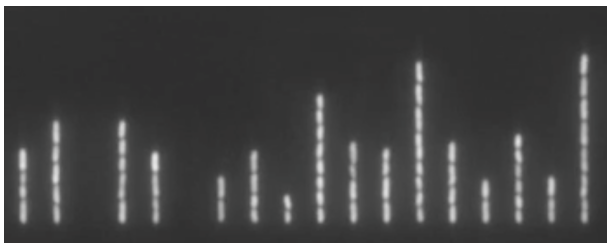
Expérience 2

Données



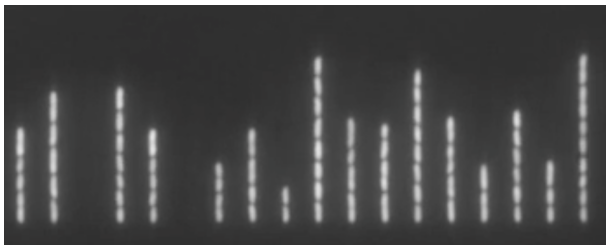
Expérience 2

Données



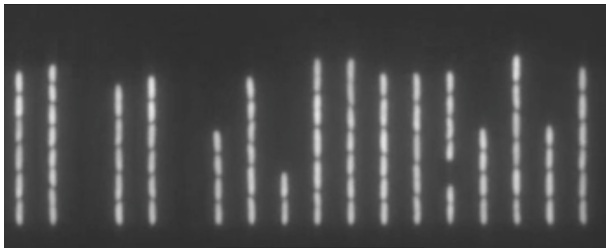
Expérience 2

Données



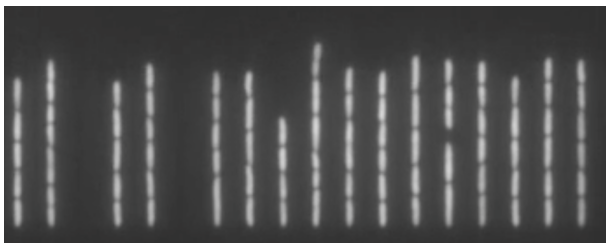
Expérience 2

Données



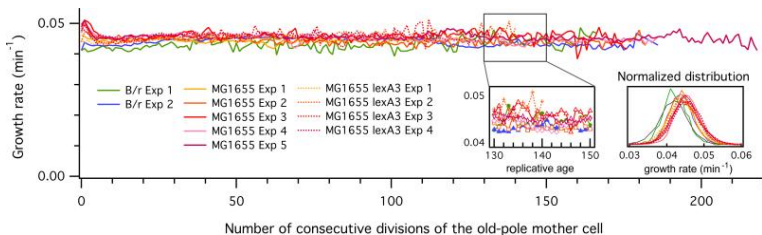
Expérience 2

Données



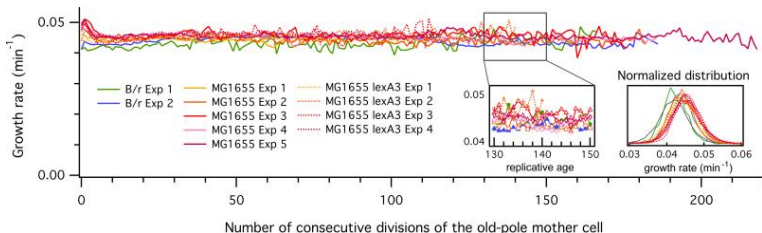
Expérience 2

Constat des biologistes [Wang & al. 2012]



Expérience 2

Constat des biologistes [Wang & al. 2012]



Question mathématique

Les deux expériences sont-elles compatibles ? Peuvent-elles correspondre au même modèle asymétrique ?

Réponse mathématique

[Delyon, dS, Krell, 2016]

- ▶ étude du modèle mathématique sur le sous-arbre
- ▶ résultats sur les données **non significatifs**, données **trop bruitées**, impossible de valider le modèle
- ▶ Etude **qualitative** confirme l'asymétrie des données
- ▶ Pas de contradiction entre les deux jeux de données
 - ▶ [Stewart & al. 2005] régime transitoire
 - ▶ [Wang & al. 2012] régime stationnaire

Plan de l'exposé

Mon parcours

Exemples d'applications de la recherche en mathématiques

Economie

Biologie

Fiabilité

Aide à la décision

Conclusion

Problème d'arrêt optimal

- ▶ Processus aléatoire (X_t)
- ▶ Fonction de performance g

Problème d'arrêt optimal

- ▶ calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- ▶ trouver un temps d'arrêt optimal τ^* qui atteint $V(x)$

Problème de maintenance

Trouver un équilibre optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

Problème d'arrêt optimal

Résultats existants [Gugerli 1986]

- ▶ caractérisation de V comme solution d'une équation récursive
- ▶ caractérisation de temps d'arrêts optimaux

Questions ouvertes

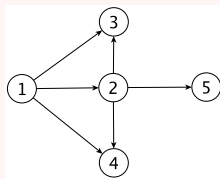
- ▶ calculer une approximation numérique de V
- ▶ calculer un temps d'arrêt optimal pour chaque trajectoire possible

Problème industriel de Thales optronique

Exemple de la climatisation

Calculer une **date de maintenance** pour un équipement soumis à différents types de **pannes** aléatoires

Groupe de climatisation



- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

Fonction de performance

Exemple de la climatisation

$$g(m, t) = \frac{t}{p(m)}$$

- ▶ $p(1) = 6$ coût de **maintenance** dans l'état stable
- ▶ $p(2) = 6$ coût de **maintenance** pour roulement à bille dégradé
- ▶ $p(3) = 5$ coût de **réparation** de l'électrovanne
- ▶ $p(4) = 3.5$ coût de **réparation** d'une panne électronique
- ▶ $p(5) = 12$ coût de **réparation** du roulement à billes

Optimisation de maintenance

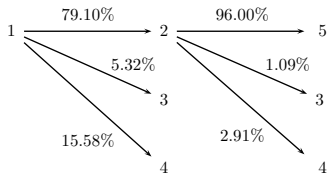
- ▶ Il vaut mieux déclencher une maintenance en mode dégradé 2 qu'attendre la panne totale 5
- ▶ Les coûts de réparation en mode 3 et 4 sont moins chers que le coût de maintenance

Performance **moyenne** sans maintenance : 342.72

Performance avec maintenance optimisée

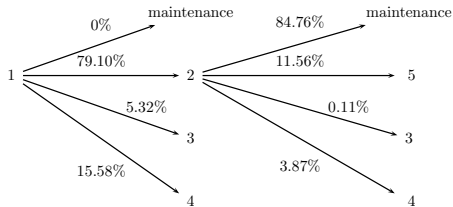
Exemple de la climatisation

Sans maintenance



Performance moyenne 342.72

Avec maintenance



Performance moyenne 592.47

Plan de l'exposé

Mon parcours

Exemples d'applications de la recherche en mathématiques

Economie

Biologie

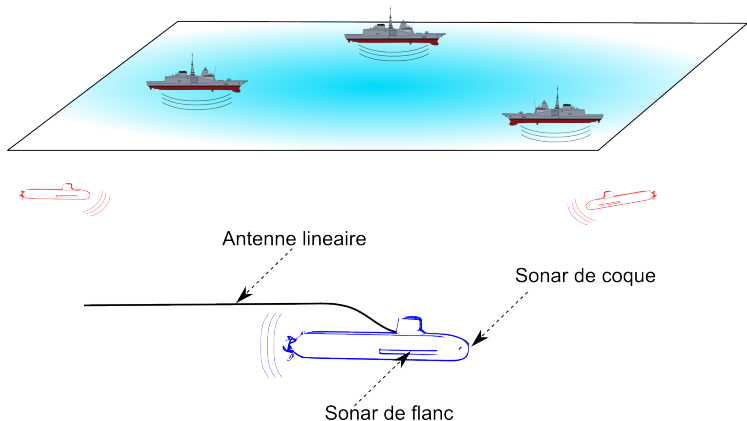
Fiabilité

Aide à la décision

Conclusion

Problème posé par DCNS

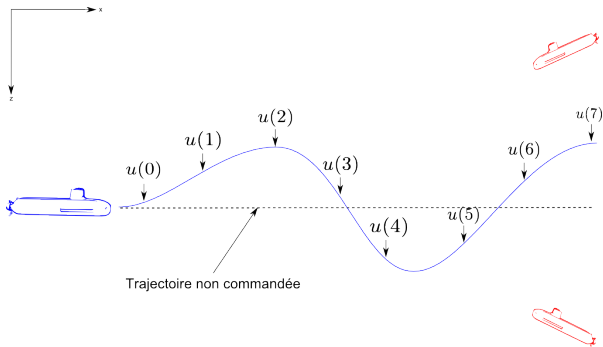
Un sous-marin avec des **senseurs** entourés de **cibles**



Mission du sous-marin

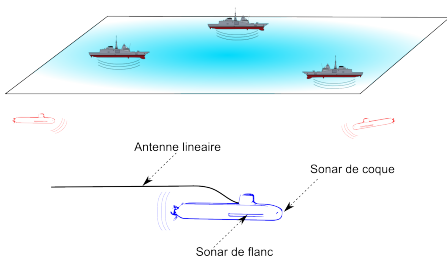
Objectif

Proposer une trajectoire optimale au sous-marin pour remplir sa mission **route de chasse** : écouter au mieux les cibles pour faire feu



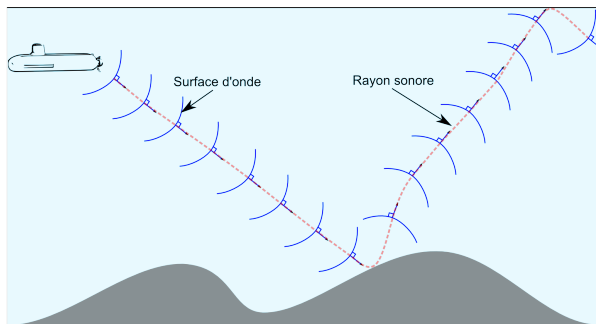
Difficultés

- ▶ plusieurs cibles
- ▶ position des cibles mal connue
- ▶ les cibles bougent
- ▶ 3 dimensions de pilotage, milieu continu
- ▶ complexité de la propagation du son dans l'eau



Propagation du son dans l'eau

- ▶ milieu sous-marin complexe, non homogène, fluctuant
- ▶ température, salinité, vitesse du son dans l'eau
- ▶ réflexions sur les fonds marins, la surface



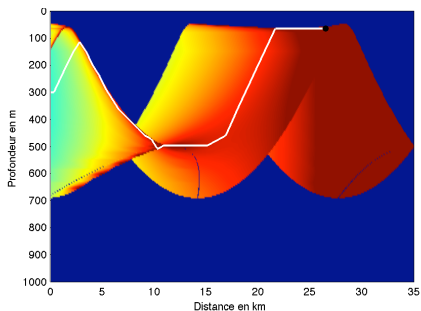
Méthodologie

- ▶ proposer un **modèle** mathématique aléatoire de la dynamique des cibles
- ▶ simplifier **exagérément** le problème pour pouvoir le résoudre et valider la solution
- ▶ ajouter de la **complexité** par étapes pour se rapprocher du problème réel

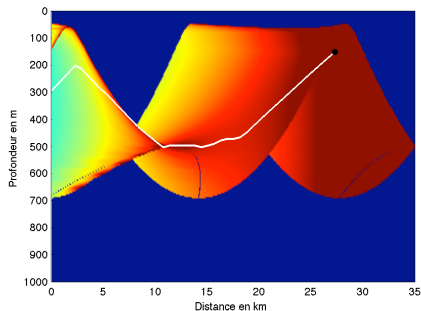
Une cible

Résultats numériques

- ▶ immersion de la cible : $500m$, du sous-marin : $300m$
- ▶ distance initiale de la cible et du sous-marin : $35km$
- ▶ vitesse initiale de la cible par rapport au sous-marin : $-10ms^{-1}$
- ▶ horizon de calcul : $45min$



$$\Delta z = 12m$$



$$\Delta z = 6m$$

Une cible

Validation

Pour les mathématicien-ne-s

- ▶ pas de solution théorique calculable de façon exacte par une formule mathématique
- ▶ validation par les diagrammes acoustiques : résultats raisonnables sur toutes les trajectoires testées

Pour DCNS

- ▶ résultats graphiques faciles à interpréter / comprendre
- ▶ exemple une cible sans intérêt pratique : les pilotes de sous-marin savent faire

3d, deux cibles

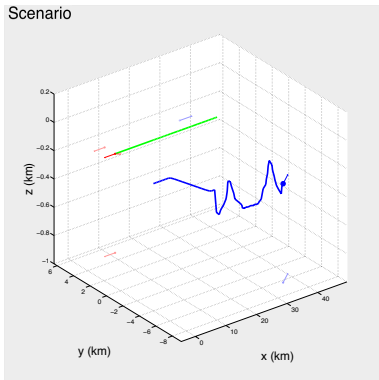
- ▶ immersion des cibles : $500m$ et $100m$, du sous-marin : $300m$
- ▶ distance initiale des cibles et du sous-marin : $50km$, $60km$
- ▶ vitesse initiale relatives des cibles par rapport au sous-marin : $10ms^{-1}$
- ▶ horizon de calcul : $45min$



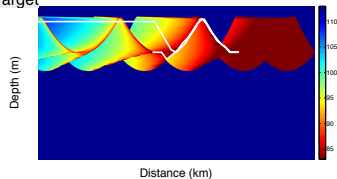
Prise en compte des mesures sonar

Objectif 1 seul : écouter la cible

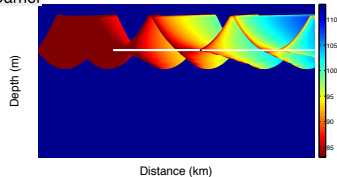
Scenario



Target



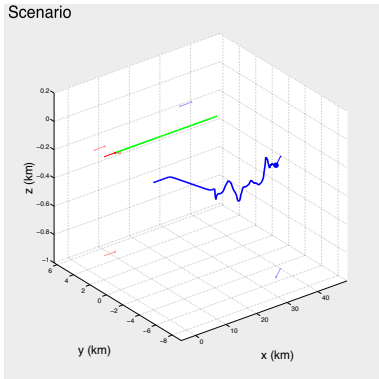
Carrier



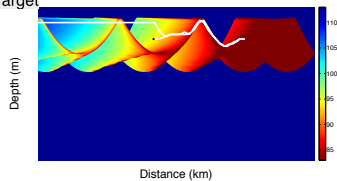
Prise en compte des mesures sonar

Objectif double

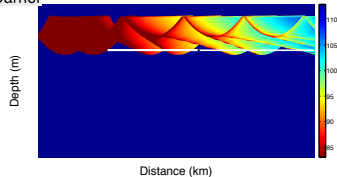
Scenario



Target



Carrier



Conclusion

Apports croisés

- ▶ Les résultats de la recherche en maths peuvent avoir des applications prévues ou non
- ▶ Les collaborations avec d'autres matières, avec des industriels apportent de nouveaux problèmes

Principaux aspects de la recherche en maths

- ▶ collaboratif
- ▶ place du numérique
- ▶ découper en sous-problèmes, simplifier pour pouvoir démarrer, complexifier par étapes

MERCI