

Analyse asymptotique des processus autorégressifs de bifurcation par des méthodes de martingales

B. Bercu B. de Saporta A. Gégout-Petit

Université de Bordeaux, IMB et INRIA CQFD

Lille – 7 janvier 2009

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Modèle et origine
 - Etat de l'art

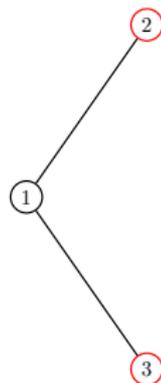
- 2 Estimateurs
 - La filtration des générations
 - Modèle

- 3 Convergences
 - Résultat clé
 - Lois des grands nombres
 - Théorème central limite

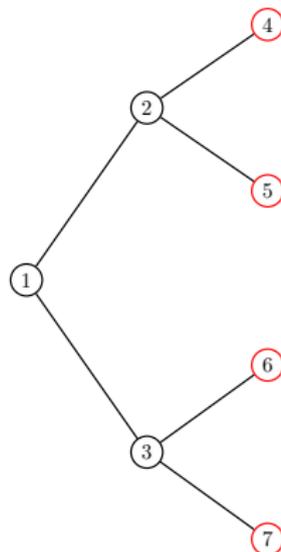
Division cellulaire

①

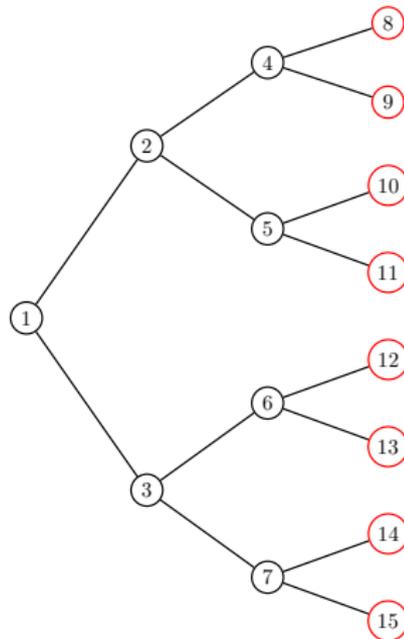
Division cellulaire



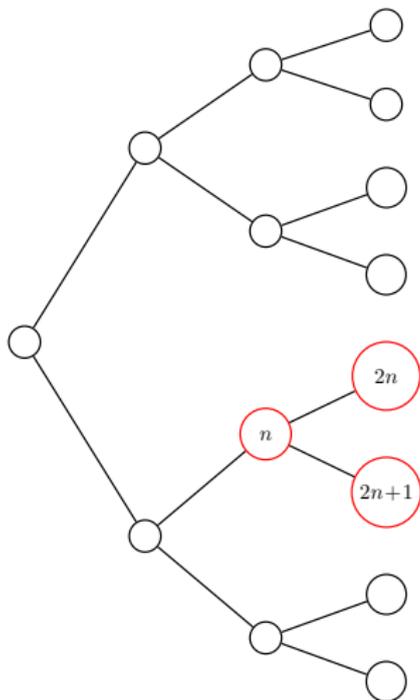
Division cellulaire



Division cellulaire



Descendants



Descendants de n :

- $2n$
- $2n + 1$

Caractéristique numérique de la cellule n (diamètre, concentration d'une molécule, ...)

- X_n

Définition mathématique

Processus autorégressifs de bifurcation **BAR**

$$\begin{cases} X_{2n} &= a + b X_n + \varepsilon_{2n}, \\ X_{2n+1} &= c + d X_n + \varepsilon_{2n+1}. \end{cases}$$

- X_1 ancêtre
- $(\varepsilon_{2n}, \varepsilon_{2n+1})$ bruit

Objectif

Estimation des coefficients déterministes a, b, c et d

Processus stationnaires

- Cowan, Staudte, Biometrics, 1986 : Introduction, motivations biologiques
- Huggins, Annals of Statistics, 1996 : EMV pour les grands arbres, ordre 1
- Huggins, Basawa, Journal of Applied Probability, 1999 and Australian Journal of Statistics, 2000 : EMV pour les grands arbres, ordre > 1
- Basawa, Zhou, Journal of Applied Probability, 2004 : BAR avec bruit exponentiel, and Journal of Time Series Analysis, 2005 : TCL pour les BAR

Caractéristiques

bruit iid, symétrie



Processus non stationnaires

- Guyon, Annals of Applied Probability, 2007 : EMC pour BAR gaussiens par les chaînes de Markov
- Delmas, Marsalle, 2008 : modèle de Guyon + mort possible des cellules

Caractéristiques

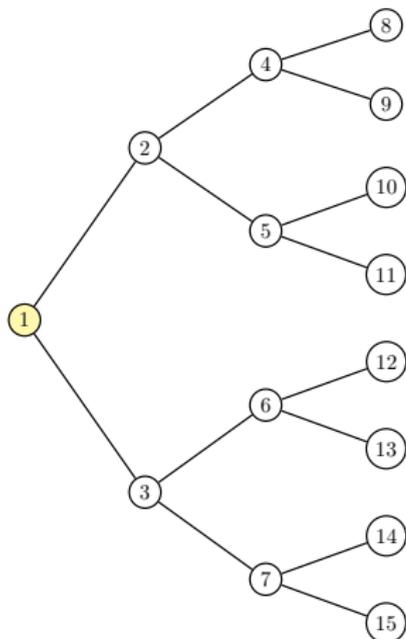
bruit iid (gaussien), absence de symétrie

Nouveaux résultats

Notre travail

- bruit **différence de martingales**
- **vitesses** de convergence
- méthodes **martingales**

Génération



■ Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$

■ Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$

■ Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$

■ Génération n :

$$\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$$

Arbre jusqu'à la génération n :

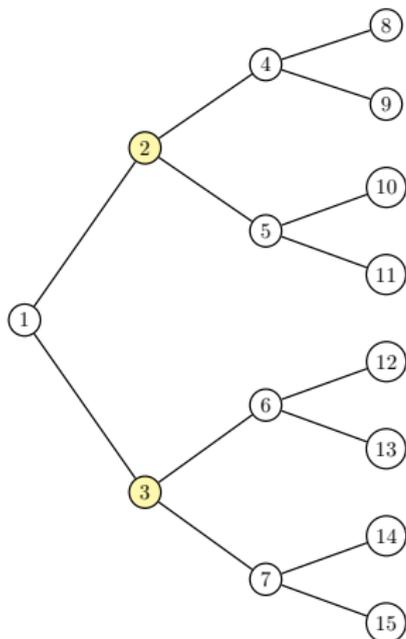
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Génération



■ Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$

■ Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$

■ Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$

■ Génération n :

$$\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$$

Arbre jusqu'à la génération n :

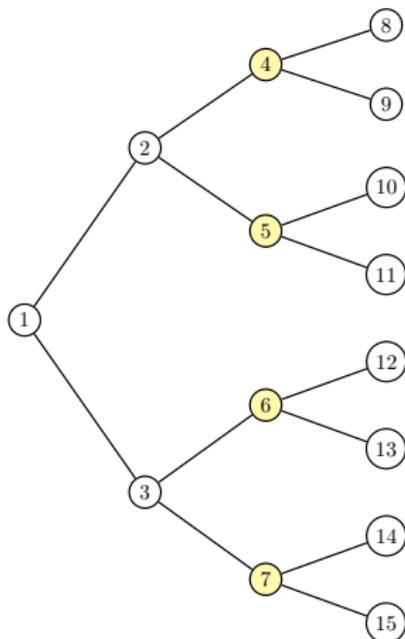
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Génération



- Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$
- Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$
- Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
- Génération n :
 $\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$

Arbre jusqu'à la génération n :

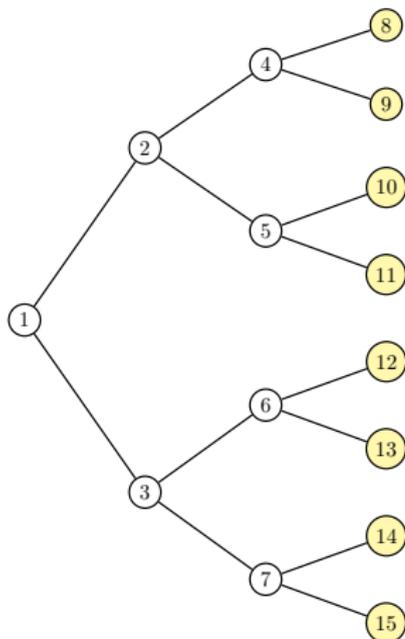
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Génération



- Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$
- Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$
- Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
- Génération n :
 $\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$

Arbre jusqu'à la génération n :

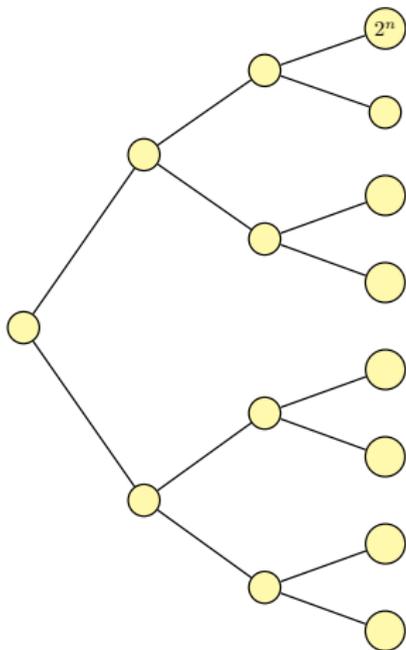
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Génération



- Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$
- Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$
- Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
- Génération n :
 $\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$

Arbre jusqu'à la génération n :

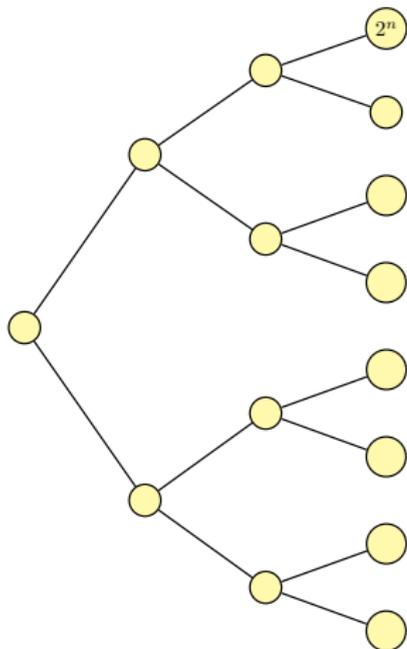
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Génération



- Génération 0 : $\mathbb{G}_0 = \{1\}$
- Génération 1 : $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$
- Génération 2 : $\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
- Génération n :
 $\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$

Arbre jusqu'à la génération n :

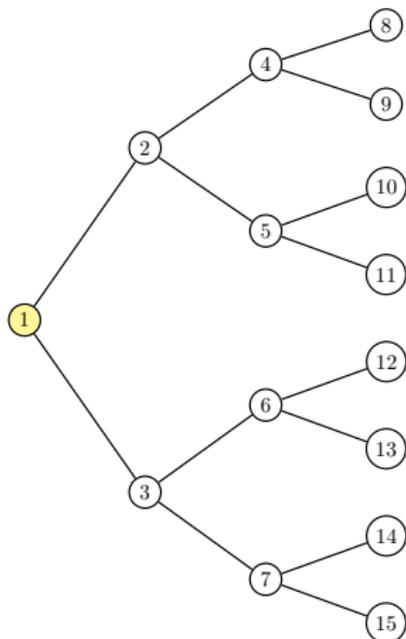
$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathbb{G}_k$$

Taille de la génération n : $|\mathbb{G}_n| = 2^n$

Taille de l'arbre jusqu'à n :

$$|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$$

Filtration

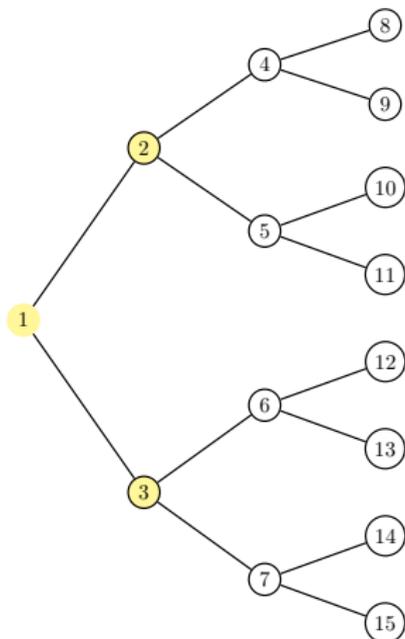


Definition

$$\mathcal{F}_0 = \sigma\{X_1\}$$

L'information croît **exponentiellement**
vite : $2\times$ plus de cellules à chaque
génération

Filtration

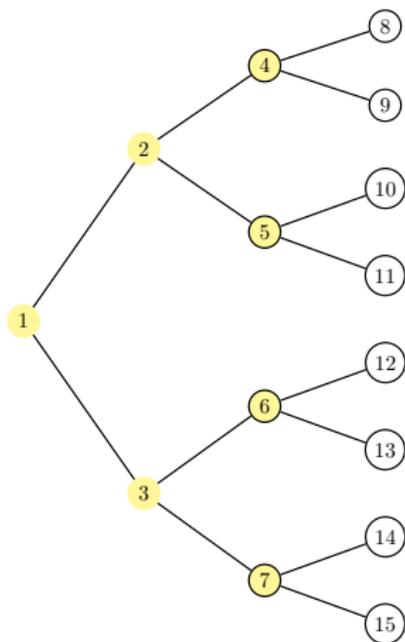


Definition

$$\mathcal{F}_1 = \sigma\{X_1, X_2, X_3\}$$

L'information croît **exponentiellement**
vite : $2\times$ plus de cellules à chaque
génération

Filtration

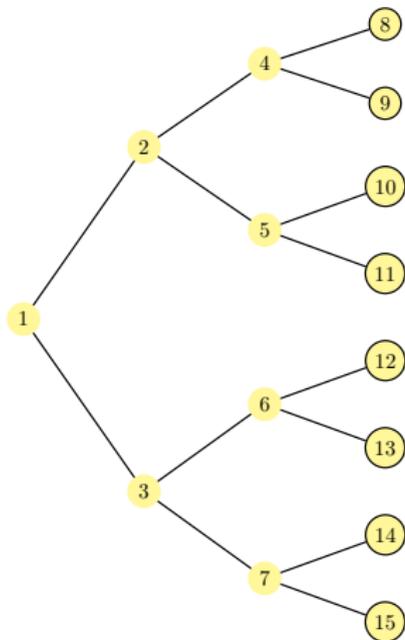


Definition

$$\mathcal{F}_2 = \sigma\{X_k \text{ avec } k \in \mathbb{T}_2\}$$

L'information croît **exponentiellement**
vite : $2 \times$ plus de cellules à chaque
génération

Filtration

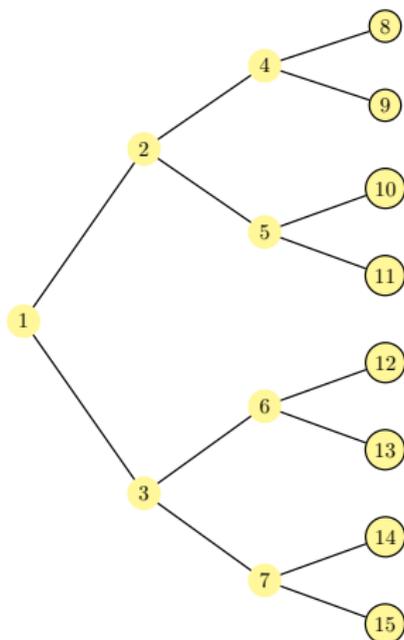


Definition

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k \text{ avec } k \in \mathbb{T}_n\}$$

L'information croît **exponentiellement**
vite : $2 \times$ plus de cellules à chaque
génération

Filtration



Definition

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k \text{ avec } k \in \mathbb{T}_n\}$$

L'information croît **exponentiellement**
vite : $2\times$ plus de cellules à chaque
génération

Notre modèle

Processus **BAR**

$$\begin{cases} X_{2n} &= a + b X_n + \varepsilon_{2n}, \\ X_{2n+1} &= c + d X_n + \varepsilon_{2n+1}. \end{cases}$$

Hypothèses

- $\mathbb{E}[X_1^8] < \infty$
- $0 < \max(|b|, |d|) < 1$
- $|a| + |c| \neq 0$

Hypothèses sur le bruit

(H.1) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{G}_{n+1}$,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_k^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2 > 0 \quad \text{p.s.}$$

(H.2) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \neq \ell \in \mathbb{G}_{n+1}$,

- si $[k/2] \neq [\ell/2]$, alors ε_k et ε_ℓ indépendant sachant \mathcal{F}_n
- si $[k/2] = [\ell/2]$, alors pour $\rho < \sigma^2$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k \varepsilon_\ell | \mathcal{F}_n] = \rho \quad \text{p.s.}$$

(H.3)

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{G}_{n+1}} \mathbb{E}[\varepsilon_k^4 | \mathcal{F}_n] < \infty \quad \text{p.s.}$$

Hypothèses sur le bruit

(H.1) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{G}_{n+1}$,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_k^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2 > 0 \quad \text{p.s.}$$

(H.2) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \neq \ell \in \mathbb{G}_{n+1}$,

- si $[k/2] \neq [\ell/2]$, alors ε_k et ε_ℓ **indépendent sachant \mathcal{F}_n**
- si $[k/2] = [\ell/2]$, alors pour $\rho < \sigma^2$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k \varepsilon_\ell | \mathcal{F}_n] = \rho \quad \text{p.s.}$$

(H.3)

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{G}_{n+1}} \mathbb{E}[\varepsilon_k^4 | \mathcal{F}_n] < \infty \quad \text{p.s.}$$

Hypothèses sur le bruit

(H.1) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{G}_{n+1}$,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_k^2 | \mathcal{F}_n] = \sigma^2 > 0 \quad \text{p.s.}$$

(H.2) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \neq \ell \in \mathbb{G}_{n+1}$,

- si $[k/2] \neq [\ell/2]$, alors ε_k et ε_ℓ **indépendent sachant \mathcal{F}_n**
- si $[k/2] = [\ell/2]$, alors pour $\rho < \sigma^2$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k \varepsilon_\ell | \mathcal{F}_n] = \rho \quad \text{p.s.}$$

(H.3)

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{G}_{n+1}} \mathbb{E}[\varepsilon_k^4 | \mathcal{F}_n] < \infty \quad \text{p.s.}$$

Estimateur des moindres carrés

Estimateur de $\theta = (a, b, c, d)^t$

$$\hat{\theta}_n = \begin{pmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{b}_n \\ \hat{c}_n \\ \hat{d}_n \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{S}_{n-1}^{-1}) \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} X_{2k} \\ X_k X_{2k} \\ X_{2k+1} \\ X_k X_{2k+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{S}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

Martingale principale

Estimateur et martingale

$$(\hat{\theta}_n - \theta) = (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{S}_{n-1}^{-1}) \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{2k} \\ X_k \varepsilon_{2k} \\ \varepsilon_{2k+1} \\ X_k \varepsilon_{2k+1} \end{pmatrix} = \Sigma_{n-1}^{-1} M_n$$

avec $\Sigma_n = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{S}_n$ et M_n \mathcal{F} -martingale

$$M_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{2k} \\ X_k \varepsilon_{2k} \\ \varepsilon_{2k+1} \\ X_k \varepsilon_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Estimateurs de variance/covariance

Estimateur de la variance conditionnelle

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{2|\mathbb{T}_{n-1}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\hat{\varepsilon}_{2k}^2 + \hat{\varepsilon}_{2k+1}^2)$$

Estimateur de la covariance conditionnelle

$$\hat{\rho}_n = \frac{1}{|\mathbb{T}_{n-1}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1}$$

avec pour tout $k \in \mathbb{G}_n$

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{2k} = X_{2k} - \hat{a}_n - \hat{b}_n X_k \\ \hat{\varepsilon}_{2k+1} = X_{2k+1} - \hat{c}_n - \hat{d}_n X_k \end{cases}$$

Rappels sur la convergence des martingales

(M_n) \mathcal{F} -martingale scalaire bornée dans L^2

$$\Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$$

Processus croissant $\langle M \rangle_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}[(\Delta M_{k+1})^2 \mid \mathcal{F}_k]$

Convergence des martingales L^2

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n = +\infty$, alors $\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \rightarrow 0$ p.s.

+ conditions de moments alors $\left(\frac{M_n}{\langle M \rangle_n}\right)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\log(\langle M \rangle_n)}{\langle M \rangle_n}\right)$ p.s.

Résultats analogues pour les martingales vectorielles.

Ici $\langle M \rangle_n = I_2 \otimes S_n$

LGN pour le bruit

Lois des grands nombres

Sous (H.1), (H.2) et (H.3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathbb{T}_n|} \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \varepsilon_k = 0 \quad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathbb{T}_n|} \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \varepsilon_k^2 = \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\mathbb{T}_{n-1}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \varepsilon_{2k} \varepsilon_{2k+1} = \rho \quad \text{p.s.}$$

Application directe de la LGN pour les martingales scalaires

Comportement asymptotique du processus croissant

$$S_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

Limite de S_n

Sous (H.1), (H.2) et (H.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{|\mathbb{T}_n|} = L \quad \text{p.s.}$$

avec L matrice symétrique définie positive explicite

LGN pour le bruit et équation de récurrence du BAR

Lois des grands nombres pour θ

Théorème

Sous (H.1), (H.2) et (H.3)

$\hat{\theta}_n$ converge p.s. vers θ à la vitesse

$$\|\hat{\theta}_n - \theta\|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\log |\mathbb{T}_{n-1}|}{|\mathbb{T}_{n-1}|}\right) \quad \text{p.s.}$$

Loi forte quadratique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\mathbb{T}_{k-1}| (\hat{\theta}_k - \theta)^t \Lambda (\hat{\theta}_k - \theta) = 4\sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

avec $\Lambda = \mathbb{I}_2 \otimes L$

Martingales vectorielles

$$(\hat{\theta}_n - \theta) = \Sigma_{n-1}^{-1} M_n$$

LGN pour les martingales vectorielles de la forme

$M_n = \sum_{k=1}^n \Psi_{k-1} \xi_k$, avec les (Ψ_k) et (ξ_k) de taille **fixe**

Problème

ici la taille des (Ψ_k) et des (ξ_k) **double** à chaque génération

Solution

refaire la preuve de la LGN vectorielle pour les martingales dans ce cas

Martingales vectorielles

$$(\hat{\theta}_n - \theta) = \Sigma_{n-1}^{-1} M_n$$

LGN pour les martingales vectorielles de la forme

$M_n = \sum_{k=1}^n \Psi_{k-1} \xi_k$, avec les (Ψ_k) et (ξ_k) de taille **fixe**

Problème

ici la taille des (Ψ_k) et des (ξ_k) **double** à chaque génération

Solution

refaire la preuve de la LGN vectorielle pour les martingales dans ce cas

Éléments de preuve

Comportement asymptotique lié à $V_n = (\hat{\theta}_n - \theta)^t \Sigma_{n-1} (\hat{\theta}_n - \theta)$

Décomposition

$$V_{n+1} + \mathcal{A}_n = V_1 + \mathcal{B}_{n+1} + \mathcal{W}_{n+1}$$

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=2}^n M_k^t (\Sigma_{k-1}^{-1} - \Sigma_k^{-1}) M_k$$

$$\mathcal{B}_{n+1} = 2 \sum_{k=2}^n M_k^t \Sigma_k^{-1} \Delta M_{k+1}$$

$$\mathcal{W}_{n+1} = \sum_{k=2}^n \Delta M_{k+1}^t \Sigma_k^{-1} \Delta M_{k+1}$$

LGN pour la variance conditionnelle

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2|\mathbb{T}_{n-1}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\varepsilon_{2k}^2 + \varepsilon_{2k+1}^2)$$

Théorème

Sous (H.1), (H.2) et (H.3), $\hat{\sigma}_n^2$ converge p.s. vers σ^2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\hat{\varepsilon}_{2k} - \varepsilon_{2k})^2 + (\hat{\varepsilon}_{2k+1} - \varepsilon_{2k+1})^2 = 4\sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{T}_n|}{n} (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2) = 4\sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

LGN pour la covariance conditionnelle

$$\rho_n = \frac{1}{|\mathbb{T}_{n-1}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \varepsilon_{2k} \varepsilon_{2k+1}$$

Théorème

Sous (H.1), (H.2) et (H.3), $\hat{\rho}_n$ converge p.s. vers ρ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\hat{\varepsilon}_{2k} - \varepsilon_{2k})(\hat{\varepsilon}_{2k+1} - \varepsilon_{2k+1}) = 2\rho \quad \text{p.s.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathbb{T}_n|}{n} (\hat{\rho}_n - \rho_n) = 4\rho \quad \text{p.s.}$$

Hypothèses supplémentaires

(H.4) $\forall n \geq 0$ et $\forall k \in \mathbb{G}_{n+1}$,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k^4 | \mathcal{F}_n] = \tau^4 \quad \text{p.s.}$$

et $\forall k \neq \ell \in \mathbb{G}_{n+1}$ avec $[k/2] = [\ell/2]$ et pour $\nu^2 < \tau^4$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k^2 \varepsilon_\ell^2 | \mathcal{F}_n] = \nu^2 \quad \text{p.s.}$$

(H.5)

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{k \in \mathbb{G}_{n+1}} \mathbb{E}[\varepsilon_k^8 | \mathcal{F}_n] < \infty \quad \text{p.s.}$$

TCL

Théorème

Sous (H.1) – (H.5)

$$\sqrt{|\mathbb{T}_{n-1}|}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma \otimes L^{-1})$$

$$\sqrt{|\mathbb{T}_{n-1}|}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\tau^4 - 2\sigma^4 + \nu^2}{2}\right)$$

$$\sqrt{|\mathbb{T}_{n-1}|}(\hat{\rho}_n - \rho) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \nu^2 - \rho^2)$$

Éléments de preuve

- Condition de **Lindeberg non** vérifiée
 - TCL pour différences de martingales vectorielles **non** vérifié pour la filtration \mathcal{F}
- ⇒ Nouvelle filtration \mathcal{G} filtration des **paires**
TCL pour différences de martingales vectorielles **valide**

Éléments de preuve

- Condition de **Lindeberg** **non** vérifiée
 - TCL pour différences de martingales vectorielles **non** vérifié pour la filtration \mathcal{F}
- ⇒ Nouvelle filtration \mathcal{G} filtration des **paires**
TCL pour différences de martingales vectorielles **valide**

Éléments de preuve

- Condition de **Lindeberg** **non** vérifiée
 - TCL pour différences de martingales vectorielles **non** vérifié pour la filtration \mathcal{F}
- ⇒ Nouvelle filtration \mathcal{G} filtration des **paires**
TCL pour différences de martingales vectorielles **valide**

C'est fini

