

---

# Queue de la solution stationnaire d'un modèle auto-régressif d'ordre 1 à coefficients markoviens.

Benoîte de Saporta

Université de Nantes

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1.$$

$(a_n, b_n)$  va sur  $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ .

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), GARCH...

BRANDT 1986, BOUGEROL et PICARD 1992,

$(a_n, b_n)$  stationnaire

Si

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|b_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1} \cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

$(a_n, b_n)$  i.i.d.

•  $\forall s > 0,$

$$\mathbb{E}\|R_1\|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s \mathbb{E}\|b_{-k}\|^s \quad \text{si } s < 1,$$

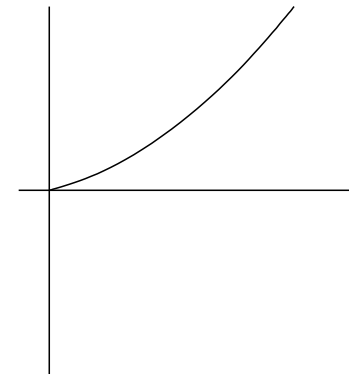
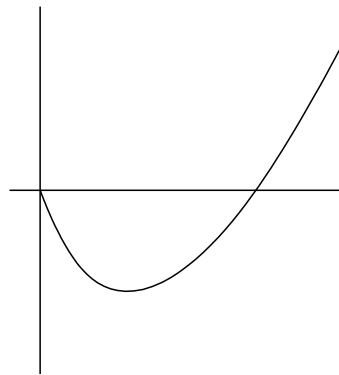
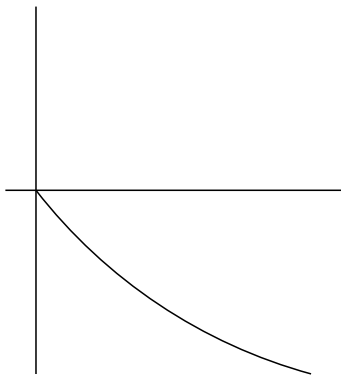
$$(\mathbb{E}\|R_1\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_{-k}\|^s)^{1/s} \quad \text{si } s \geq 1.$$

• Si  $b_0$  a des moments à tout ordre,  $R$  a un moment d'ordre  $s$  si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n} < 1$$

$s \mapsto \log k(s)$  est convexe

3 cas possibles :



KESTEN 1973, 1974 : dimension  $d$ , matrices positives  
LE PAGE 1983 : dimension  $d$ , matrices quelconques  
GOLDIE 1991 : dimension 1

•  $\mathbb{E}\|R_1^s\| < \infty$  si et seulement si  $k(s) < 1$

• Si  $k(\kappa) = 1$ , queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R_1\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

**Théorème 1 (Goldie)**  $(a_n, b_n)$  iid,  $\exists \kappa > 0$  vérifiant

$$\mathbb{E}|a_0|^\kappa = 1, \quad \mathbb{E}[|a_0|^\kappa \log^+ |a_0|] < \infty, \quad \mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty,$$

loi conditionnelle de  $\log |a_0|$  sachant  $a_0 \neq 0$  *non-arithmétique*.

• *Premier cas :  $a_0 \geq 0$ , alors*

$$t^\kappa \mathbb{P}(R_1 > t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} C_+, \quad t^\kappa \mathbb{P}(R_1 < -t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} C_-,$$

$C_+ \geq 0$  et  $C_- \geq 0$  constantes.

• *Deuxième cas :  $\mathbb{P}(a_0 < 0) > 0$  alors mêmes limites les limites avec*

$C_+ = C_- \geq 0$ .

• *Dans les deux cas,  $C_+ + C_- > 0$  ssi  $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)x) < 1$ .*



1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

Auto-régression à **régime markovien** :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

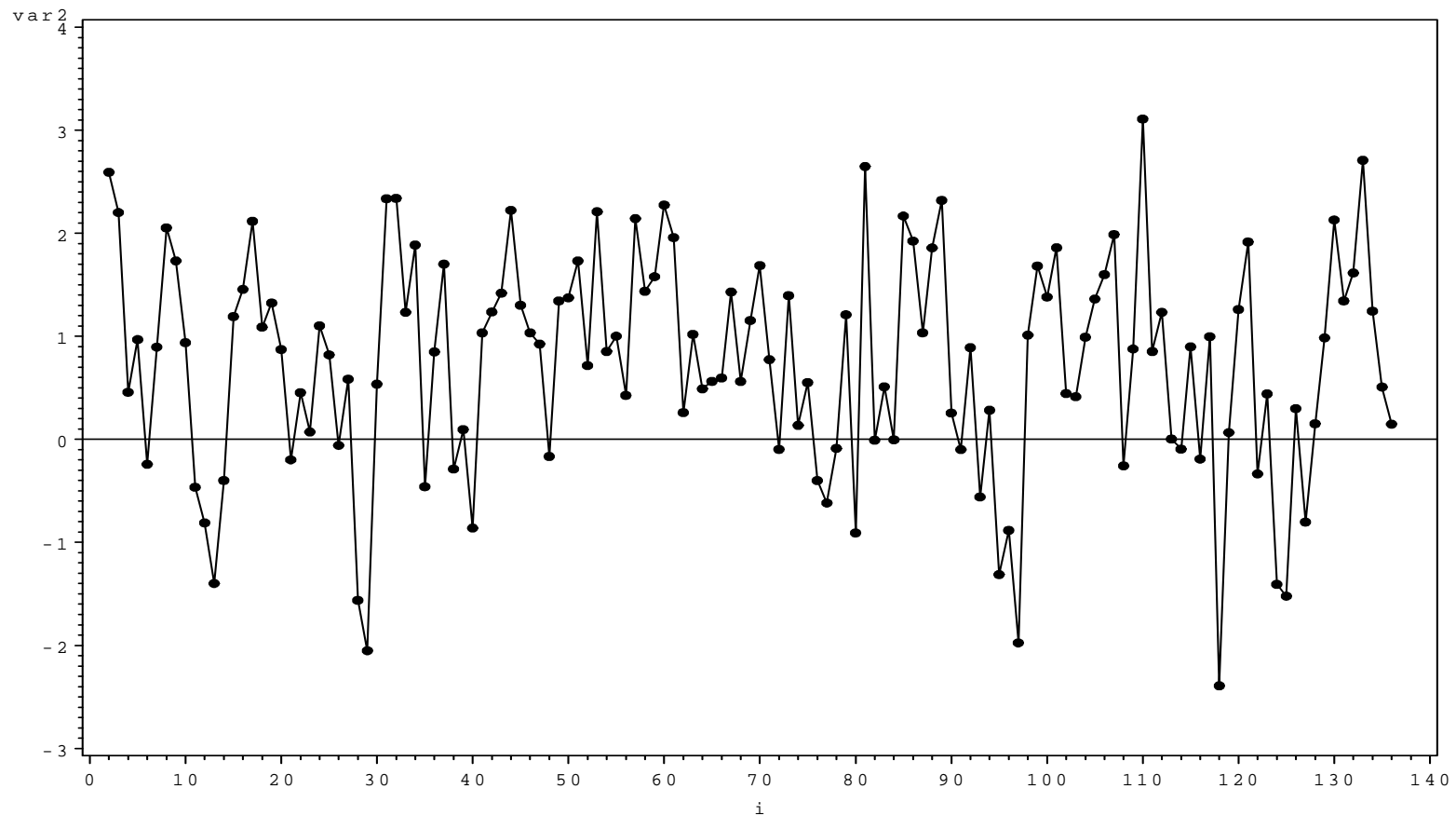
$(a_n)$  est une chaîne de Markov

Séries chronologiques qui changent de régime au cours du temps

- séries économiques
- données climatiques

## Exemple de HAMILTON 1989

PIB américain entre 1952 et 1984 : variation trimestrielle



## ● Modèle :

$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \dots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

- $X_n = 100 \log \frac{\text{PIB}_n}{\text{PIB}_{n-1}}$

- $a_n = (a_n(j), j = 0, \dots, 4)$  chaîne de Markov à deux états

$$(909, 265, 29, -126, -110)/1000$$

$$(-420, 216, 628, -73, 97)/1000$$

- Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

## ● Interprétation des états :

1=croissance, 2=récession  $\implies$  Cycles économiques

Processus auto-régressif à régime markovien scalaire :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$(a_n)$  : chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire sur  $E = \{e_1, \dots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$ , matrice de transition  $P = (p_{ij})$ , loi stationnaire  $\mu$ .

$(b_n)$  i.i.d. non nulles, indépendantes de  $(a_n)$

Si  $\mathbb{E} \log(a_0) = \sum \log(e_i) \mu(e_i) < 0$  et  $\mathbb{E} \log^+(b_0) < \infty$  unique solution stationnaire :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Théorème 2**

1. il existe  $\kappa > 0$  tel que la matrice  $P_\kappa = \text{diag}(e_i^\kappa)^t P$  soit de rayon spectral 1,
2. les  $\log e_i$  ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre,
3.  $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$ ,

alors pour  $x \in \{-1, 1\}$  on a :

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} L(x),$$

où  $L(1) + L(-1) > 0$ .

**Si  $b_0 \geq 0$ , alors  $L(-1) = 0$ , et  $L(1) > 0$ . Si  $b_0 \leq 0$ , alors  $L(1) = 0$ , et  $L(-1) > 0$ .**

2 états :  $E = \{e_1, e_2\}$ , matrice de transition  $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ ,  $p < 1$ ,  $q < 1$   
 et  $p + q \neq 0$

loi invariante :  $\mu = \frac{1}{2-p-q}(1-q, 1-p)$

Condition de stationnarité :  $|e_1|^{1-q}|e_2|^{1-p} < 1$

Matrice  $P_s$  :  $P_s = \begin{pmatrix} |e_1|^s p & |e_1|^s (1-q) \\ |e_2|^s (1-p) & |e_2|^s q \end{pmatrix}$

Rayon spectral :  $\rho_s = \frac{|e_1|^s p + |e_2|^s q + \sqrt{\Delta_s}}{2}$ , avec

$$\Delta_s = |e_1|^{2s} p^2 + |e_2|^{2s} q^2 + 2|e_1 e_2|^s (pq - 2p - 2q + 2)$$

Condition d'existence de  $\kappa$  :

Pas de  $\kappa$  : moment à tout ordre si :

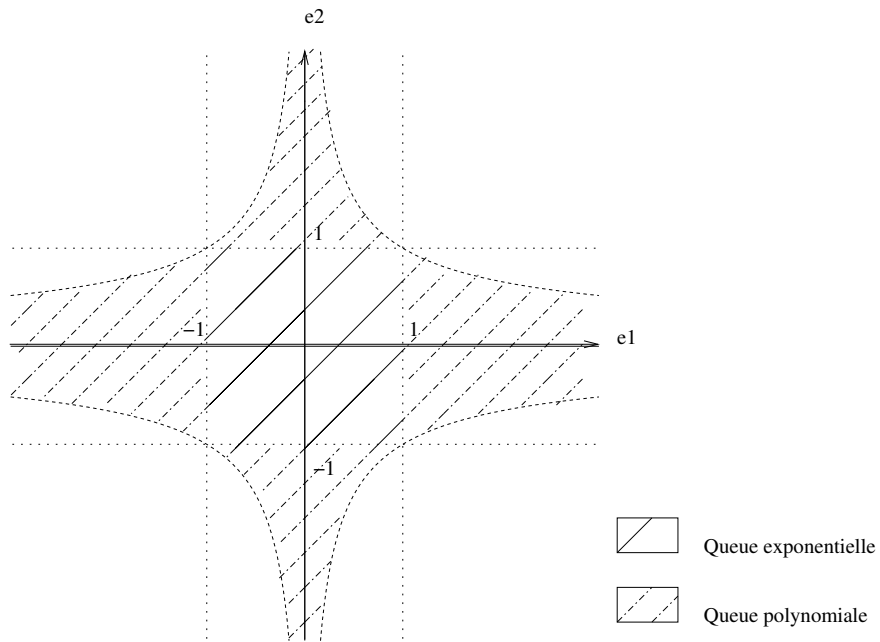
- $|e_1| \leq 1$  et  $|e_2| \leq 1$ ,
- $p = 0$  et  $1 < |e_1| \leq |e_2|^{-1}$ ,
- $q = 0$  et  $1 < |e_2| \leq |e_1|^{-1}$ .

$\exists \kappa$  : queue polynômiale si :

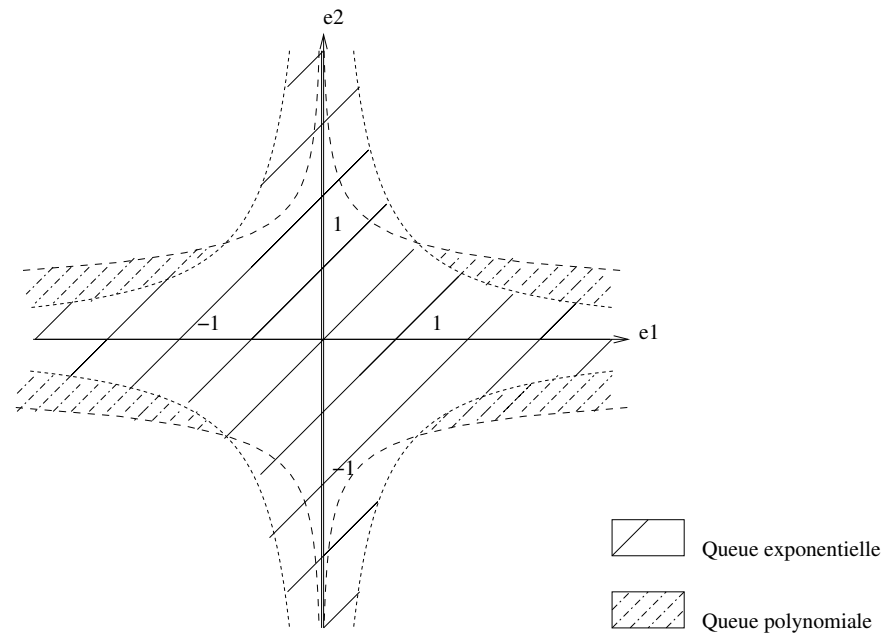
- $|e_1| > 1$  et  $p \neq 0$ ,
- $p = 0$  et  $|e_2|^{-1} < |e_1| < |e_2|^{-1/1-q}$ ,
- $|e_2| > 1$  et  $q \neq 0$ ,
- $q = 0$  et  $|e_1|^{-1} < |e_2| < |e_1|^{-1/1-p}$ .



# Régime Markovien Exemple de 2 régimes (3)



ex :  $p = 0.5, q = 0.7$



ex :  $p = 0, q = 0.7$

LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

$$z(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u) du.$$

$x = \pm 1$ , même comportement asymptotique que  $t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t)$ .

$z(x, t) = \sum_{i=1}^p Z_i(x, t)$ , où :

$$Z_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) du.$$

$$\begin{aligned}
 R_1 = a_0 R_0 + b_0 \implies \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) &= \mathbb{P}(xa_0 R_0 + xb_0 > u, a_0 = e_i) \\
 &= \mathbb{P}(xa_0 R_0 > u, a_0 = e_i) + \psi_i(x, t)
 \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned}
 G_i(x, t) &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \psi_i(x, u) du \\
 &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa (\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0 R_0 > u, a_0 = e_i)) du.
 \end{aligned}$$

Alors

$$Z_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xe_i R_0 > u, a_0 = e_i) du + G_i(x, t).$$

Changement de variable

$$Z_i(x, t) = e^{-(t - \log e_i)} e_i^\kappa \int_0^{e^{t - \log e_i}} u^\kappa \mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) du + G_i(x, t).$$

Propriété de Markov et stationnarité

$$\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) = \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_j) p_{ji}.$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} Z_i(x, t) &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^p \left[ p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \right] + G_i(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^p \int Z_j(x, t - u) F_{ij}(du) + G_i(x, t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbf{1}_{t \geq \log e_i}.$$

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

$F = (F_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  matrice de distributions.

$G = {}^t(G_1, \dots, G_p)$  vecteur de fonctions réelles, bornées sur les compacts.

$Z = {}^t(Z_1, \dots, Z_p)$  vecteur de fonctions inconnues qui vérifie

$$Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t-u) F_{ik}(du),$$

$\implies$  comportement asymptotique de  $Z$  en  $+\infty$ .

FELLER 1971 :  $p = 1$ ,  $F_{11}$  probabilité :

CRUMP 1970, ATHREYA et RAMA MURTHY 1976 :

$p > 1$ ,  $F_{ij} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

- Produit de convolution matriciel  $F * H$  :  
 $H$  matrice  $p \times r$  de fonctions réelles mesurables

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} H_{kj}(t - u) F_{ik}(du).$$

- Espérance de  $F$  :  $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$  avec  $\gamma_{ij} = \int u F_{ij}(du)$ .
- $F^{(0)}(t) = \text{diag}(\mathbf{1}_{t \geq 0}, \dots, \mathbf{1}_{t \geq 0})$ .
- $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$ .
- Fonction de renouvellement  $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$ .

$F$  est **arithmétique** si :

- pour tout  $i \neq j$ ,  $F_{ij}$  est concentrée sur un ensemble de la forme  $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$ ,
- pour tout  $i$ ,  $F_{ii}$  est concentrée sur  $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$ ,
- les  $\lambda_{ii}$  sont multiple entiers d'un même nombre,

$\lambda$  le plus grand de ces nombres,

- pour tous  $a_{ij}$ ,  $a_{jk}$ ,  $a_{ik}$  points d'accroissement de  $F_{ij}$ ,  $F_{jk}$  et  $F_{ik}$ ,  
 $a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$  est un multiple entier de  $\lambda$ .



1. Mesures finies :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad F_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{ij}(t) < \infty.$$

2. Transience :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) < \infty.$$

3.  $F(\infty)$  irréductible à puissances bornées en norme.

4. Rayon spectral :  $\rho(F(\infty)) = 1$ .

$m$  et  $u$  vecteurs propres de Perron-Frobenius :

$$F(\infty)m = m, \quad {}^t u F(\infty) = {}^t u,$$

$$\sum_{i=1}^p m_i = 1, \quad \sum_{i=1}^p u_i m_i = 1.$$

**Théorème 3**

*Première forme :*

- *hypothèses 1-4*
  - *$F$  non arithmétique*
  - *espérance  $\Gamma$  existe*
- alors,  $\gamma = {}^t u \Gamma m > 0$  et*

$$U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{m_i u_j}{\gamma} h.$$

*Deuxième forme :*

- *Mêmes hypothèses*
  - *$G$  directement Riemann intégrable*
  - *$Z = U * G$  existe,*
- alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^p \left[ u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u) du \right].$$

- Incréments de  $U$  **uniformément bornés**

$\implies \exists(t_n) \rightarrow +\infty$  et  $V_{ij}$  mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des  $V_{ij}$

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$  avec  $G_k$  continue à support compact

$t_n \rightarrow +\infty$  dans l'équation de renouvellement

solutions de  $Z = F * Z$

$\implies V_{ij}$  multiples de la mesure de Lebesgue :  $V_{ij} = a_{ij}\ell$

- Identification des coefficients de proportionnalité

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$  avec  $G_k(t) = \mathbf{1}_{[0, 1]}(t) \implies a_{ij} = cm_i u_j$

$G(t) = (F(\infty)\mathbf{1}_{t \geq 0} - F(t))m \implies c = \gamma^{-1}$

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

Rappel :

$$\begin{aligned} Z_i(x, t) &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^p \left[ p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \right] + G_i(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^p \int Z_j(x, t - u) F_{ij}(du) + G_i(x, t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbf{1}_{t \geq \log e_i},$$

et

$$G_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \left[ \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) \right] du.$$

- $F_{ij}$  mesures finies,  $F_{ij}(\infty) = e_i^\kappa p_{ji} = P_\kappa$  de rayon spectral 1.
- Espérance de  $F$  :  $\Gamma_{ij} = e_i^\kappa p_{ji} \log e_i$ .
- Les  $\log(e_i)$  ne sont pas multiples entiers d'un même nombre, donc  $F$  **non arithmétique**.
- Finitude de  $U$  :
$$U_{ij}(t) = \sum F_{ij}^{(n)}(t) \leq e^{\frac{\kappa t}{2}} \sum (P_{\frac{\kappa}{2}})_{ij}^n$$
série convergente par convexité de  $s \mapsto \log(\rho(P_s))$ .
- $Z = U * G$  : itérer l'équation de renouvellement, et  $F^{(n)} * Z \rightarrow 0$
- $G$  est **directement Riemann intégrable** : utiliser  $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < +\infty$ .

Théorème de renouvellement pour les systèmes :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} z(x, t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p Z_i(x, t) \\ &= \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^p \left[ u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x, s) ds \right].\end{aligned}$$

Limite non nulle ?

Si  $b_1$  est de signe constant :

Alors

$$G_i(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa (\mathbb{P}(u - xb_0 < xa_0 R_0 \leq u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(u < xa_0 R_0 \leq u - xb_0, a_0 = e_i)) du.$$

de signe constant sur  $\mathbb{R}$ , car l'une des de ces deux probabilités est nulle.

Si  $b_1 \geq 0$ , alors  $R_1 \geq 0$  donc  $z(-1, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , et  $\lim z(1, t) > 0$ .

Si  $b_1 \leq 0$ , alors  $R_1 \leq 0$  donc  $z(1, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , et  $\lim z(-1, t) > 0$ .



● Première étape :  
GRINCEVICIUS 1980, GOLDIE 1991

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C \mathbb{P}(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

Inégalité de symétrisation de Lévy  
Lemme de Feller Chung

● Deuxième étape :

Evaluer  $\mathbb{P}(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon})$ .

Marche aléatoire à pas markovien :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}).$$

Etude du processus d'échelle  $S_{\tau_n}$  où :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{k > \tau_{n-1} : S_k > S_{\tau_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Arjas et Speed 1973 + Renouvellement

$$\implies e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_n) > t) = e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_{\tau_n}) > t) \geq C > 0,$$

$C > 0$  constante explicite.

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

## En dimension 1

- On peut affaiblir l'hypothèse d'indépendance entre  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
- Résultat analogue lorsque les  $a_n$  changent de signe
- Diffusion continue à régime markovien

## En dimension supérieure

- Chaîne à espace d'états fini inclus dans les matrices positives

- Dimension  $d$  et chaîne de Markov à support fini quelconque
- Chaînes de Markov plus générales