Queue de la solution stationnaire d'un modèle auto-régressif d'ordre 1 à coefficients markoviens.

Benoîte de Saporta

http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/˜ saporta/

Université de Nantes

Plan de l'exposé

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1.$$

(a_n, b_n) va sur $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), GARCH...

BRANDT 1986, BOUGEROL et PICARD 1992,

(a_n, b_n) stationnaire

Si

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|b_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1} \cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

(a_n, b_n) i.i.d.

- $\forall s > 0$,

$$\mathbb{E}\|R_1\|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s \mathbb{E}\|b_{-k}\|^s \qquad \text{si } s < 1,$$

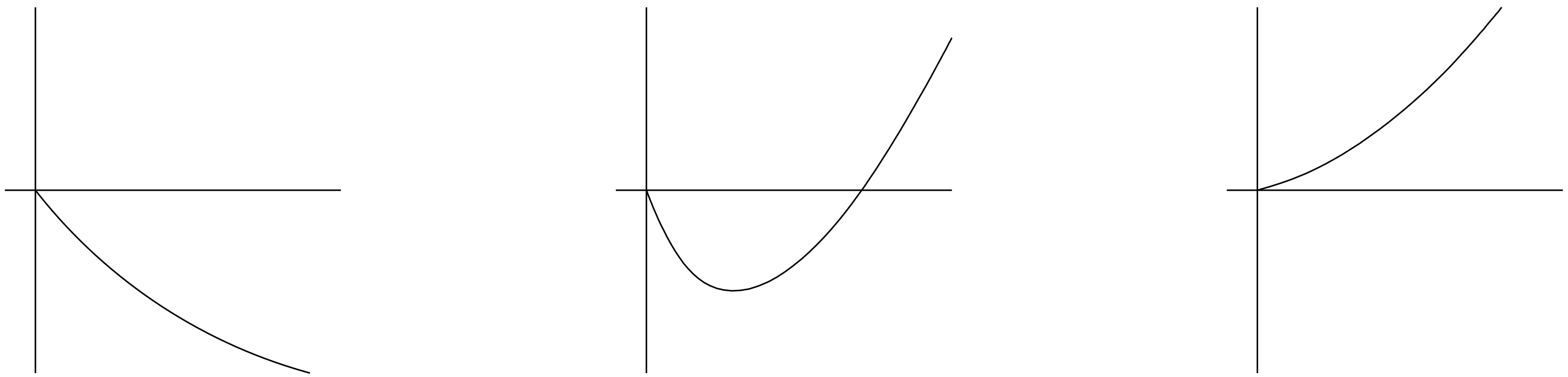
$$(\mathbb{E}\|R_1\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_{-k}\|^s)^{1/s} \qquad \text{si } s \geq 1.$$

- Si b_0 a des moments à tout ordre, R a un moment d'ordre s si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n} < 1$$

$s \longmapsto \log k(s)$ est convexe

3 cas possibles :



KESTEN 1973, 1974 : dimension d, matrices positives
LE PAGE 1983 : dimension d, matrices quelconques
GOLDIE 1991 : dimension 1

- $\mathbb{E}\|R_1^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R_1\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Théorème 1 (Goldie) (a_n, b_n) *iid,* $\exists \kappa > 0$ *vérifiant*

$$\mathbb{E}|a_0|^\kappa = 1, \quad \mathbb{E}\big[|a_0|^\kappa \log^+ |a_0|\big] < \infty, \quad \mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty,$$

loi conditionnelle de $\log |a_0|$ *sachant* $a_0 \neq 0$ *non-arithmétique.*

• *Premier cas :* $a_0 \geq 0$*, alors*

$$t^\kappa \mathbb{P}(R_1 > t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} C_+, \quad t^\kappa \mathbb{P}(R_1 < -t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} C_-,$$

$C_+ \geq 0$ *et* $C_- \geq 0$ *constantes.*

• *Deuxième cas :* $\mathbb{P}(a_0 < 0) > 0$ *alors mêmes limites les limites avec* $C_+ = C_- \geq 0$*.*

• *Dans les deux cas,* $C_+ + C_- > 0$ *ssi* $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)x) < 1$*.*

Auto-régression à régime markovien :

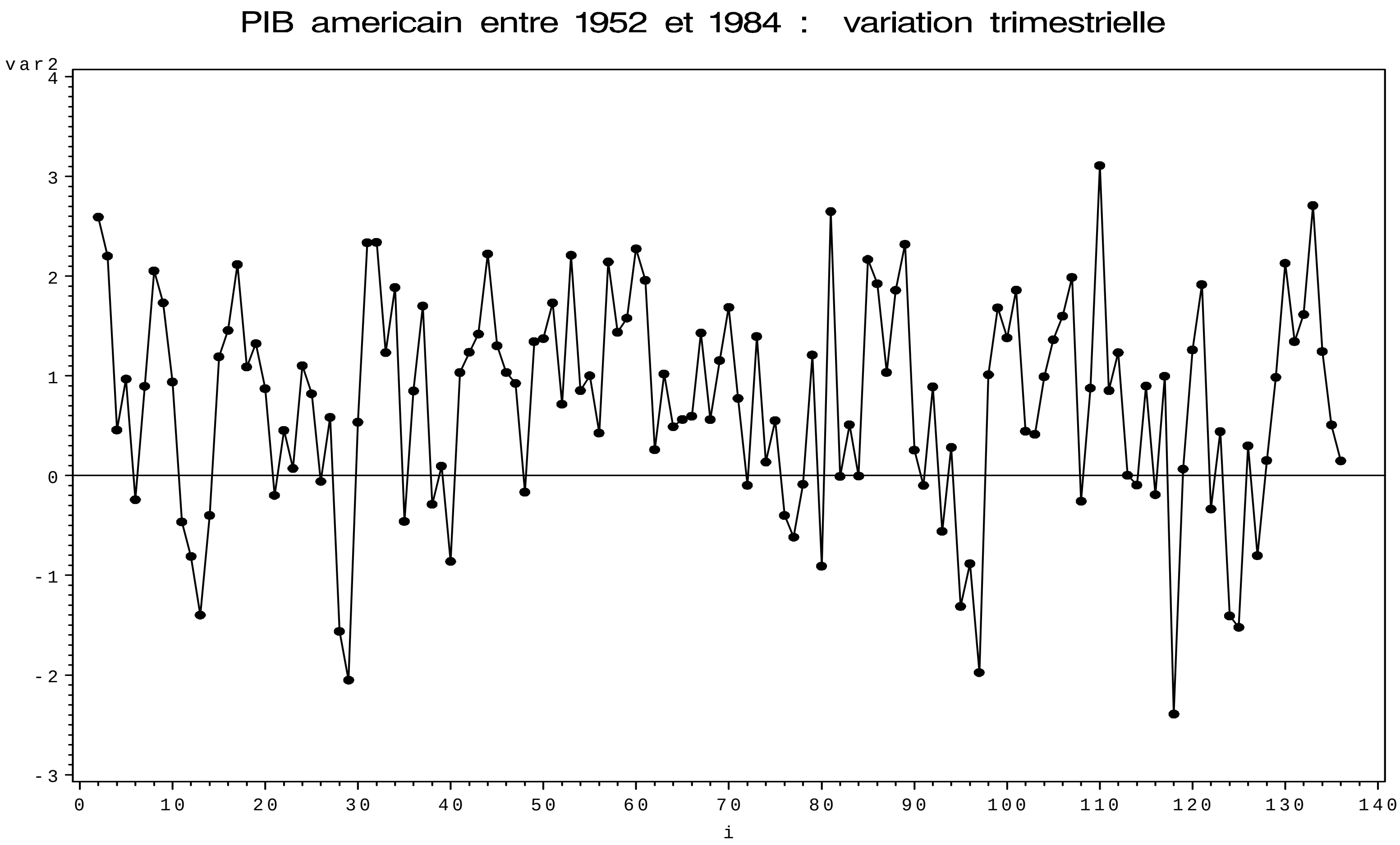
$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

(a_n) est une chaîne de Markov

Séries chronologiques qui changent de régime au cours du temps

- séries économiques
- données climatiques

Exemple de HAMILTON 1989



Exemple de Hamilton (2)

- Modèle :

$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \cdots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

  - $X_n = 100 \log \frac{\mathrm{PIB}_n}{\mathrm{PIB}_{n-1}}$
  - $a_n = (a_n(j),\ j = 0, .., 4)$ chaîne de Markov à deux états

$$(909,\ 265,\ 29,\ -126,\ -110)/1000$$
$$(-420,\ 216,\ 628,\ -73,\ 97)/1000$$

  - Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

- Interprétation des états :
1=croissance, 2=récession $\Longrightarrow$ Cycles économiques

Processus auto-régressif à régime markovien scalaire :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

(a_n) : chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire sur $E = \{e_1, \ldots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$, matrice de transition $P = (p_{ij})$, loi stationnaire μ.

(b_n) i.i.d. non nulles, indépendantes de (a_n)

Si $\mathbb{E} \log(a_0) = \sum \log(e_i)\mu(e_i) < 0$ et $\mathbb{E} \log^+(b_0) < \infty$ unique solution stationnaire :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Théorème 2

1. *il existe* $\kappa > 0$ *tel que la matrice* $P_\kappa = diag(e_i^\kappa)^t P$ *soit de rayon spectral* 1*,*
2. *les* $\log e_i$ *ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre,*
3. $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$*,*

alors pour $x \in \{-1, 1\}$ *on a :*

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t\to\infty]{} L(x),$$

où $L(1) + L(-1) > 0$*.*

Si $b_0 \geq 0$*, alors* $L(-1) = 0$*, et* $L(1) > 0$*. Si* $b_0 \leq 0$*, alors* $L(1) = 0$*, et* $L(-1) > 0$*.*

Exemple de 2 régimes (1)

2 états : $E = \{e_1, e_2\}$, matrice de transition $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, $p < 1$, $q < 1$ et $p + q \neq 0$

loi invariante : $\mu = \frac{1}{2-p-q}(1-q, 1-p)$

Condition de stationnarité : $|e_1|^{1-q}|e_2|^{1-p} < 1$

Matrice P_s : $P_s = \begin{pmatrix} |e_1|^s p & |e_1|^s(1-q) \\ |e_2|^s(1-p) & |e_2|^s q \end{pmatrix}$

Rayon spectral : $\rho_s = \frac{|e_1|^s p + |e_2|^s q + \sqrt{\Delta_s}}{2}$, avec
$\Delta_s = |e_1|^{2s}p^2 + |e_2|^{2s}q^2 + 2|e_1 e_2|^s(pq - 2p - 2q + 2)$

Exemple de 2 régimes (2)

Condition d'existence de κ :

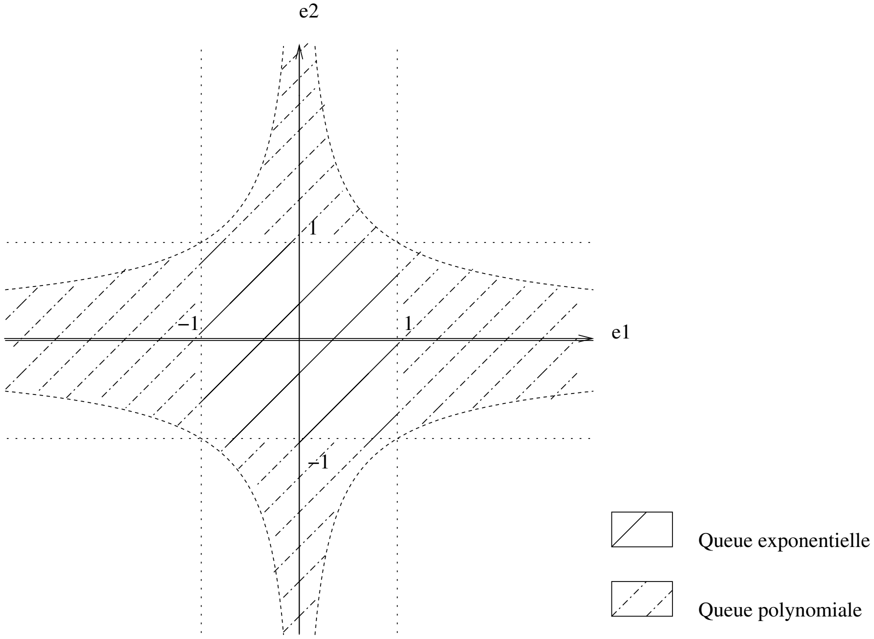
Pas de κ : moment à tout ordre si :

- $|e_1| \leq 1$ et $|e_2| \leq 1$,
- $p = 0$ et $1 < |e_1| \leq |e_2|^{-1}$,
- $q = 0$ et $1 < |e_2| \leq |e_1|^{-1}$.

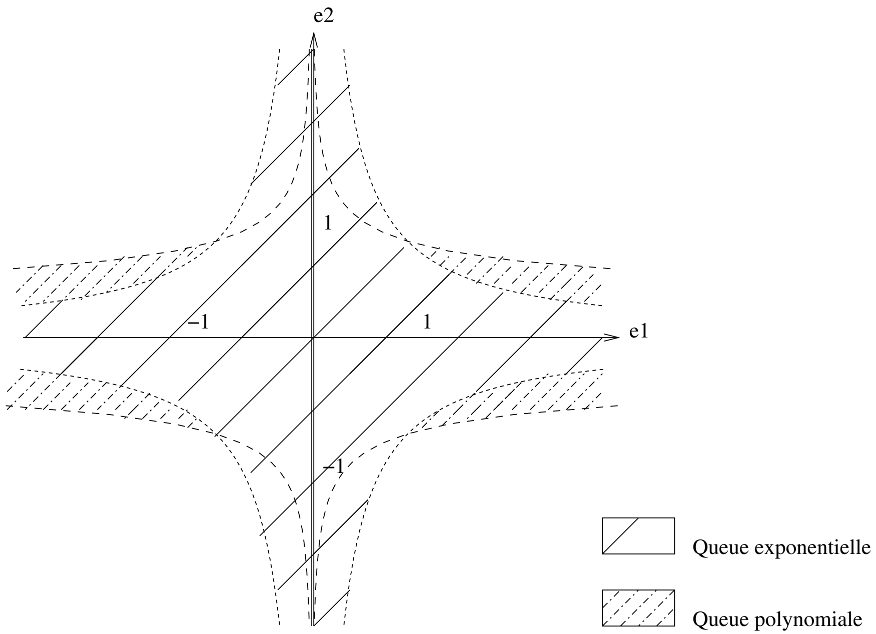
$\exists \kappa$: queue polynômiale si :

- $|e_1| > 1$ et $p \neq 0$,
- $p = 0$ et $|e_2|^{-1} < |e_1| < |e_2|^{-1/1-q}$,
- $|e_2| > 1$ et $q \neq 0$,
- $q = 0$ et $|e_1|^{-1} < |e_2| < |e_1|^{-1/1-p}$.

Exemple de 2 régimes (3)



ex : $p = 0.5$, $q = 0.7$



ex : $p = 0$, $q = 0.7$

Equations de renouvellement (1)

LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

$$z(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > u)du.$$

$x = \pm 1$, même comportement asymptotique que $t^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > t)$.

$z(x,t) = \sum_{i=1}^{p} Z_i(x,t)$, où :

$$Z_i(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i)du.$$

Equations de renouvellement (2)

$$\begin{aligned} R_1 = a_0 R_0 + b_0 \Longrightarrow \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) &= \mathbb{P}(xa_0R_0 + xb_0 > u, a_0 = e_i) \\ &= \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) + \psi_i(x,t) \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} G_i(x,t) &= e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \psi_i(x,u)du \\ &= e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa (\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i))du. \end{aligned}$$

Alors

$$Z_i(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xe_iR_0 > u, a_0 = e_i)du + G_i(x,t).$$

Changement de variable

$$Z_i(x,t) = e^{-(t-\log e_i)} e_i^\kappa \int_0^{e^{t-\log e_i}} u^\kappa \mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i)du + G_i(x,t).$$

Propriété de Markov et stationnarité

$$\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_j) p_{ji}.$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} Z_i(x,t) &= e_i^{\kappa} \sum_{j=1}^{p} \left[p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \right] + G_i(x,t) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \int Z_j(x, t-u) F_{ij}(du) + G_i(x,t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^{\kappa} p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log e_i}.$$

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

$F = (F_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ matrice de distributions.

$G = {}^t(G_1, \ldots, G_p)$ vecteur de fonctions réelles, bornées sur les compacts.

$Z = {}^t(Z_1, \ldots, Z_p)$ vecteur de fonctions inconnues qui vérifie

$$Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t-u) F_{ik}(du),$$

$\Longrightarrow$ comportement asymptotique de Z en $+\infty$.

FELLER 1971 : $p = 1$, F_{11} probabilité :

CRUMP 1970, ATHREYA et RAMA MURTHY 1976 :
$p > 1$, F_{ij} : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

• Produit de convolution matriciel $F * H$:
H matrice $p \times r$ de fonctions réelles mesurables

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} H_{kj}(t-u) F_{ik}(du).$$

• Espérance de F : $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1 \le i,j \le p}$ avec $\gamma_{ij} = \int u F_{ij}(du)$.

• $F^{(0)}(t) = diag(\mathbf{1}_{t \ge 0}, \ldots, \mathbf{1}_{t \ge 0})$.

• $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$.

• Fonction de renouvellement $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

F est arithmétique si :

• pour tout $i \neq j$, F_{ij} est concentrée sur un ensemble de la forme $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$,

• pour tout i, F_{ii} est concentrée sur $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$,

• les λ_{ii} sont multiple entiers d'un même nombre,

λ le plus grand de ces nombres,

• pour tous $a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ik}$ points d'accroissement de $F_{ij},\ F_{jk}$ et F_{ik},
$a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$ est un multiple entier de λ.

1. Mesures finies :

$$\forall\, 1 \leq i,j \leq p, \qquad F_{ij}(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) < \infty.$$

2. Transience :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) < \infty.$$

3. $F(\infty)$ irréductible à puissances bornées en norme.

4. Rayon spectral : $\rho(F(\infty)) = 1$.

m et u vecteurs propres de Perron-Frobenius :

$$F(\infty)m = m, \qquad {}^t u F(\infty) = {}^t u,$$
$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1.$$

Théorème 3

Première forme :

- *hypothèses 1-4*
- F *non arithmétique*
- *espérance* Γ *existe*

alors, $\gamma = {}^t u \Gamma m > 0$ *et*

$$U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{m_i u_j}{\gamma} h.$$

Deuxième forme :

- *Mêmes hypothèses*
- G *directement Riemann intégrable*
- $Z = U * G$ *existe,*

alors

$$\lim_{t\to\infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^{p} \Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u) du \Big].$$

• Incréments de U uniformément bornés
$\Longrightarrow \exists (t_n) \to +\infty$ et V_{ij} mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

• Identification des V_{ij}
$G = {}^t(0, \ldots, G_k, \ldots, 0)$ avec G_k continue à support compact
$t_n \to +\infty$ dans l'équation de renouvellement
solutions de $Z = F * Z$
$\Longrightarrow V_{ij}$ multiples de la mesure de Lebesgue : $V_{ij} = a_{ij}\ell$

• Identification des coefficients de proportionnalité
$G = {}^t(0, \ldots, G_k, \ldots, 0)$ avec $G_k(t) = \mathbb{1}_{[0,\ 1]}(t) \qquad \Longrightarrow a_{ij} = c m_i u_j$

$G(t) = (F(\infty)\mathbb{1}_{t\geq 0} - F(t))m \qquad \Longrightarrow c = \gamma^{-1}$

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

Rappel :

$$\begin{aligned} Z_i(x,t) &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^{p} \Big[p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \Big] + G_i(x,t) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \int Z_j(x, t-u) F_{ij}(du) + G_i(x,t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log e_i},$$

et

$$G_i(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \Big[\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) \Big] du.$$

Application du th de renouvellement

- F_{ij} mesures finies, $F_{ij}(\infty) = e_i^\kappa p_{ji} = P_\kappa$ de rayon spectral 1.
- Espérance de F : $\Gamma_{ij} = e_i^\kappa p_{ji} \log e_i$.
- Les $\log(e_i)$ ne sont pas multiples entiers d'un même nombre, donc F non arithmétique.
- Finitude de U :
$$U_{ij}(t) = \sum F_{ij}^{(n)}(t) \le e^{\frac{\kappa t}{2}} \sum (P_{\frac{\kappa}{2}})_{ij}^n$$
série convergente par convexité de $s \longmapsto \log\big(\rho(P_s)\big)$.
- $Z = U * G$: itérer l'équation de renouvellement, et $F^{(n)} * Z \to 0$
- G est directement Riemann intégrable : utiliser $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < +\infty$.

Théorème de renouvellement pour les systèmes :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) &= \lim_{t\to\infty} z(x,t) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{p} Z_i(x,t) \\
&= \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{p} \Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x,s)\,ds \Big].
\end{aligned}$$

Limite non nulle ?

Si b_1 est de signe constant :

Alors

$$\begin{aligned} G_i(x,t) &= e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\big(\mathbb{P}(u - xb_0 < xa_0R_0 \leq u, a_0 = e_i) \\ &\quad -\mathbb{P}(u < xa_0R_0 \leq u - xb_0, a_0 = e_i)\big)du. \end{aligned}$$

de signe constant sur $\mathbb{R}$, car l'une des de ces deux probabilités est nulle.

Si $b_1 \geq 0$, alors $R_1 \geq 0$ donc $z(-1,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, et $\lim z(1,t) > 0$.

Si $b_1 \leq 0$, alors $R_1 \leq 0$ donc $z(1,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, et $\lim z(-1,t) > 0$.

- Première étape :
  GRINCEVICIUS 1980, GOLDIE 1991

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C\ \mathbb{P}(\sup_n\ a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

  Inégalité de symétrisation de Lévy
  Lemme de Feller Chung

- Deuxième étape :

  Evaluer $\mathbb{P}(\sup_n\ a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon})$.

Marche aléatoire à pas markovien :

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}).$$

Etude du processus d'échelle S_{τ_n} où :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 1 : \quad S_n > 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{k > \tau_{n-1} : \quad S_k > S_{\tau_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Arjas et Speed 1973 + Renouvellement

$$\Longrightarrow e^{\kappa t}\mathbb{P}(\max(S_n) > t) = e^{\kappa t}\mathbb{P}(\max(S_{\tau_n}) > t) \geq C > 0,$$

$C > 0$ constante explicite.

1. Introduction : le cas indépendant
2. Régime markovien
3. Théorème de renouvellement
4. Schéma de preuve
5. Autres résultats et perspectives

En dimension 1

- On peut affaiblir l'hypothèse d'indépendance entre (a_n) et (b_n).
- Résultat analogue lorsque les a_n changent de signe
- Diffusion continue à régime markovien

En dimension supérieure

- Chaîne à espace d'états fini inclus dans les matrices positives

Perspectives

- Dimension d et chaîne de Markov à support fini quelconque
- Chaînes de Markov plus générales