

# Processus markoviens déterministes par morceaux

Benoîte de Saporta

Université de Montpellier, IMAG, Inria CQFD



**IMAG**  
INSTITUT MONTPELLIERAIN  
ALEXANDER GROTHENDIECK



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Présentation informelle

Construction

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Processus markoviens déterministes par morceaux

[M. Davis]

## Davis (80's)

Classe générale de processus stochastiques

*virtually all continuous-time stochastic models arising in applications except diffusions*

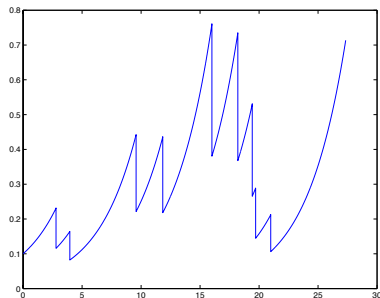
- ▶ processus : évolution dynamique au cours du temps
- ▶ markoviens : absence de mémoire le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent
- ▶ déterministe : comportement déterministe
- ▶ par morceaux : entre des sauts aléatoires

# Division cellulaire

[N. Krell]

Taille d'une bactérie au temps  $t$

- ▶ Croissance exponentielle
- ▶ Division en 2 en fonction de la taille

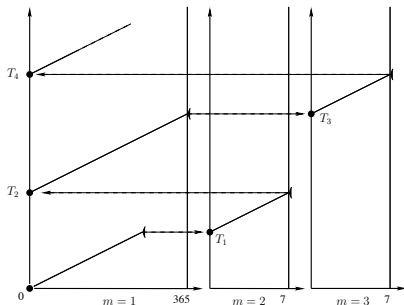


# Modèle d'atelier

[M. Davis]

Fonctionnement d'un atelier avec une machine

- ▶ peut fonctionner normalement
- ▶ peut tomber en panne et être envoyée en réparation
- ▶ peut fonctionner et être envoyée en maintenance



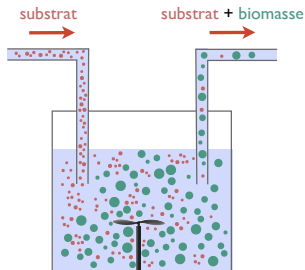
# Chemostat

[C. Fritsch]

Masse d'une population de bactéries au temps  $t$

## Dynamique

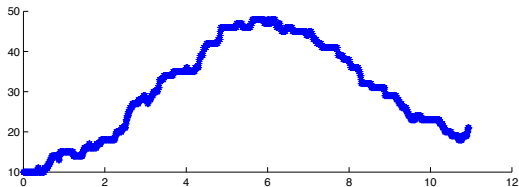
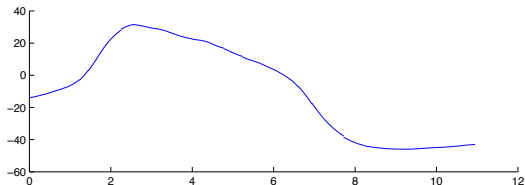
- ▶ croissance exponentielle des bactéries (en fonction du substrat)
- ▶ division des bactéries
- ▶ soutirage



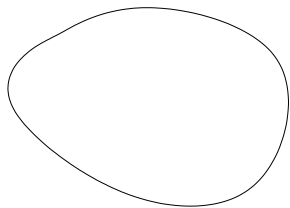
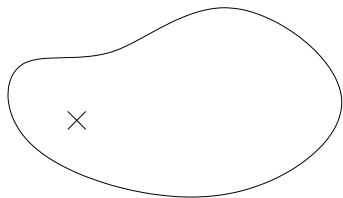
# Potentiel électrique le long d'un neurone

[M. Thiullen]

Potentiel électrique et nombre de canaux ioniques  $K^+$  ouverts  
(100 canaux)

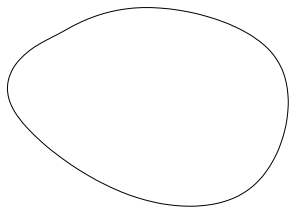
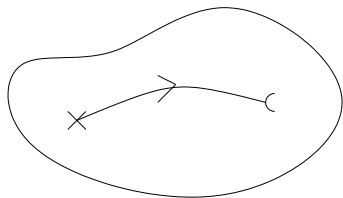


# Définition informelle

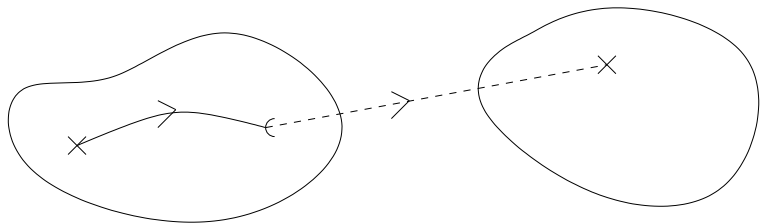




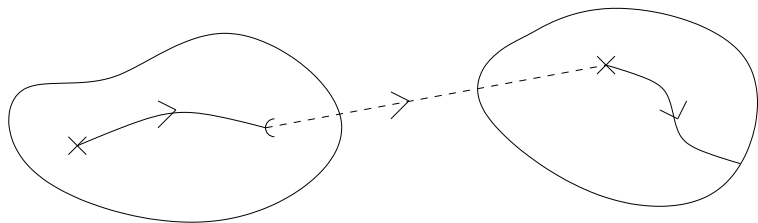
# Définition informelle



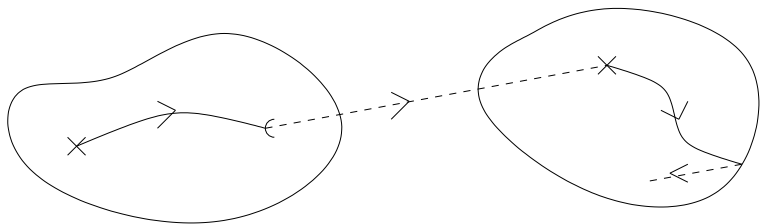
# Définition informelle



# Définition informelle



# Définition informelle



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Présentation informelle

Construction

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Espace d'états

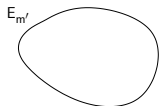
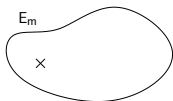
Processus hybride  $X_t = (m_t, y_t)$

- ▶ mode discret  $m_t \in M = \{1, 2, \dots, p\}$
- ▶ variables d'état euclidiennes  $y_t \in \mathbb{R}^d$

Espace d'états

$E_m$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $m \in M$

$$E = \cup(\{m\} \times E_m)$$



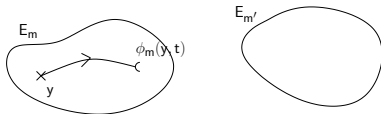
# Dynamique déterministe

## Flot

Dans le mode  $m$ ,  $\phi_m: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$

- ▶  $\phi_m(y, t)$  solution au temps  $t$  d'un système d'équations différentielles partant de  $y$  au temps 0
- ▶ Propriété de **semi-groupe**

$$\phi_m(y, s+t) = \phi_m(\phi_m(y, s), t)$$



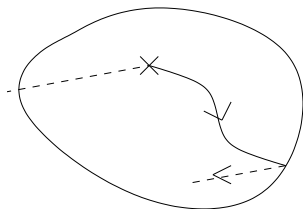
# Mécanisme de saut : quand sauter ?

## Sauts déterministes

### Sauts déterministes

temps déterministe d'atteinte de la frontière  $t^*(m, y)$

$$t^*(m, y) = \inf\{t > 0 : \phi_m(y, t) \in \partial E_m\}$$





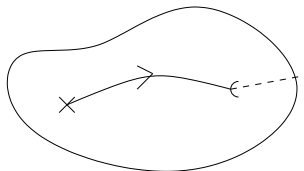
# Mécanisme de saut : quand sauter ?

## Sauts aléatoires

### Sauts aléatoires

Intensité  $\lambda_m$  dans le mode  $m$  :  $\bar{E}_m \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t) = e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}$$



- ▶ loi de type **loi exponentielle**
- ▶ l'intensité dépend de la **position** du processus

# Loi exponentielle classique

$T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}(T > t)$$

### Preuve

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u)$$

## Loi exponentielle classique

$T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

### Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}(T > t)$$

### Preuve

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \frac{\mathbb{P}(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}(T > u)}$$

## Loi exponentielle classique

$T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

### Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u)}{\mathbb{P}(T > u)}\end{aligned}$$

## Loi exponentielle classique

$T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

### Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u)}{\mathbb{P}(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda u}}\end{aligned}$$

## Loi exponentielle classique

$T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  si  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

### Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T > t + u)}{\mathbb{P}(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda u}} \\ &= e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t)\end{aligned}$$

# Loi exponentielle d'intensité non constante

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}_{(m,\phi_m(y,u))}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u)}{\mathbb{P}_y(T > u)}\end{aligned}$$

# Loi exponentielle d'intensité non constante

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}_{(m,\phi_m(y,u))}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}}{e^{-\int_0^u \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}}\end{aligned}$$



# Loi exponentielle d'intensité non constante

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}_{(m,\phi_m(y,u))}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}}{e^{-\int_0^u \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}} \\ &= e^{-\int_u^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}\end{aligned}$$

# Loi exponentielle d'intensité non constante

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}_{(m,\phi_m(y,u))}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_y(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}}{e^{-\int_0^u \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}} \\ &= e^{-\int_u^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s+u)) ds}\end{aligned}$$

# Loi exponentielle d'intensité non constante

## Propriété d'absence de mémoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T > t + u | T > u) = \mathbb{P}_{(m,\phi_m(y,u))}(T > t)$$

### Preuve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_y(T > t + u | T > u) &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u, T > u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_y(T > t + u)}{\mathbb{P}_y(T > u)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}}{e^{-\int_0^u \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds}} \\ &= e^{-\int_u^{t+u} \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s+u)) ds} \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(\phi_m(y,u),s)) ds} = \mathbb{P}_{\phi_m(y,u)}(T > t) \end{aligned}$$

# Mécanisme de saut : quand sauter ?

Loi du premier temps de saut  $T_1$

Minimum entre

- ▶ le temps déterministe d'atteinte de la frontière
- ▶ le temps de saut aléatoire

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} & \text{si } t < t^*(m, y) \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(m, y) \end{cases}$$

## Mécanisme de saut : où sauter

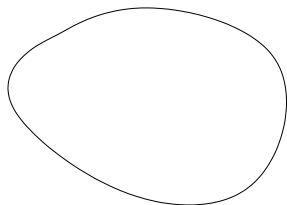
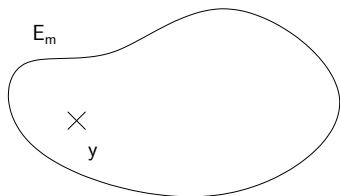
Nouveau mode et/ou position  $(M_1, Y_1)$  sélectionnés au temps  $T_1$   
par un noyau markovien  $Q_m$

$$\mathbb{P}_{(m,y)}((M_1, Y_1) \in A) = \int_A Q_m(\phi_m(y, T_1), dx)$$

# Construction itérative

Point de départ

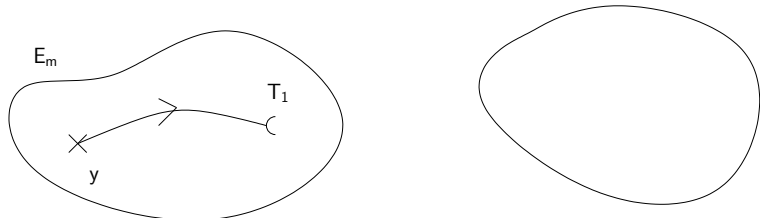
$$X_0 = Z_0 = (m, y) = x$$



## Construction itérative

$X_t$  suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut  $T_1 = S_1$

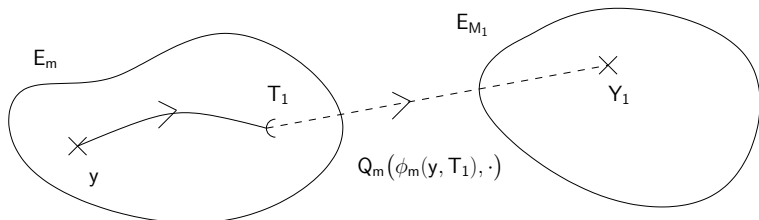
$$X_t = (m, \phi_m(y, t)) = \phi(x, t), \quad t < T_1$$



# Construction itérative

Position et mode après-saut  $Z_1 = (M_1, Y_1)$  tirés suivant la loi

$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot) = Q(\phi(x, T_1), \cdot)$$

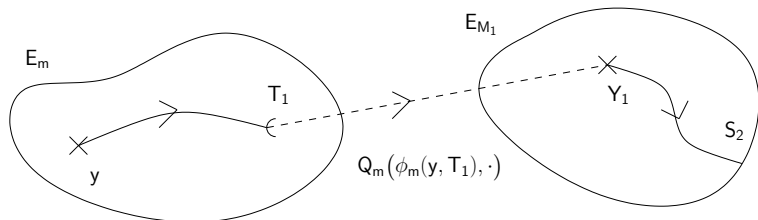




# Construction itérative

$X_t$  suit le flot déterministe jusqu'au prochain temps de saut  $T_2$

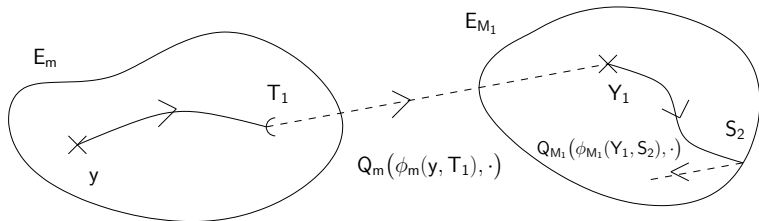
$$X_{T_1+t} = (M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)) = \phi(Z_1, t - T_1), \quad t < S_2 = T_2 - T_1$$



## Construction itérative

Position et mode après-saut  $Z_2 = (M_2, Y_2)$  tirés suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) = Q(\phi(Z_1, S_2), \cdot) \dots$$



# Construction itérative

[M. Davis]

- ▶ **Initialisation**  $X_0 = Z_0 = x = (m, y)$ ,  $S_0 = T_0 = 0$
- ▶ **Récurrence** pour tout  $n \geq 0$ 
  - ▶ tirer  $S_{n+1}$  selon l'intensité  $\lambda$  et le temps d'atteinte de la frontière
  - ▶ poser  $T_{n+1} = T_n + S_{n+1}$
  - ▶ pour  $T_n \leq t < T_{n+1}$ , poser  $X_t = \phi(Z_n, t - T_n)$
  - ▶ tirer  $Z_{n+1}$  suivant  $Q(\phi(Z_n, S_{n+1}), \cdot)$

⇒ Processus de **Markov fort**  $(X_t)$

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

Fiabilité dynamique

Mécanique

Biologie

Neurosciences

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Domaines d'application

## Premières applications

- ▶ gestion de stock
- ▶ files d'attente
- ▶ assurance
- ▶ modèles d'atelier

## Applications plus récentes

- ▶ mécanique
- ▶ fiabilité dynamique
- ▶ biologie
- ▶ neurosciences

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

Fiabilité dynamique

Mécanique

Biologie

Neurosciences

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Transmission Control Protocol (TCP)

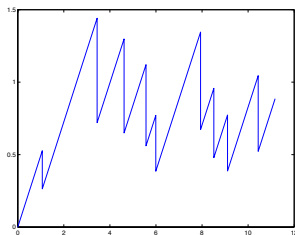
[F. Malrieu]

Modélisation simplifiée du **traffic internet** :  $X_t$  nombre de **paquets** transmis au temps  $t$

- ▶ augmentation à vitesse constante 1
- ▶ événements aléatoires de **congestion** : nombre de paquets divisé par 2

## Modélisation PDMP

- ▶ Espace d'états  $[0, +\infty[$
- ▶ Flot  $\phi(x, t) = x + t$
- ▶ Intensité  $\lambda(x) = x$
- ▶ Noyau de saut  $Q(x, x/2) = 1$



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

**Fiabilité dynamique**

Mécanique

Biologie

Neurosciences

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

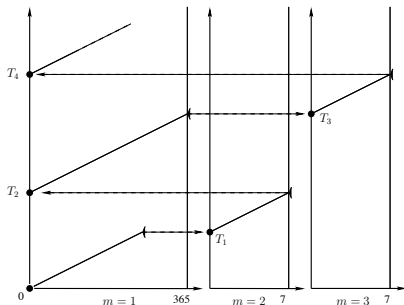


# Modèle d'atelier

[M. Davis] Description

Fonctionnement d'un atelier avec une machine

- ▶ peut fonctionner normalement
- ▶ peut tomber en panne et être envoyée en réparation
- ▶ peut fonctionner et être envoyée en maintenance

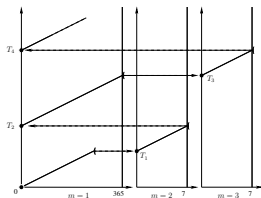


# Modèle d'atelier

[M. Davis] Modélisation PDMP

$$X_t = (m_t, Y_t)$$

- ▶  $m_t$  : mode de fonctionnement
- ▶  $Y_t$  : temps passé dans ce mode

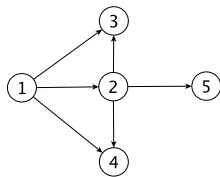


## Modèle PDMP

- ▶ Espace d'états  $M = \{1, 2, 3\}$ ,  $E_1 = [0, 365[$ ,  $E_2 = E_3 = [0, 7[$
- ▶ Flot  $\phi_m(y, t) = y + t$
- ▶ Intensité Weibull ( $\alpha = 2$ ,  $\beta = 600$ )  $\lambda_1(y) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1}$ ,  
 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$
- ▶ Noyau de saut  $1 \rightarrow 2$  si réparation,  $1 \rightarrow 3$  si maintenance

# Groupe de climatisation

## [Thales Optronique] Description



- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **dégradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

# Groupe de climatisation

[Thales Optronique] Modélisation PDMP

$$X_t = (m_t, Y_t)$$

- ▶  $m_t$  : état de l'équipement
- ▶  $Y_t$  : temps passé depuis le début

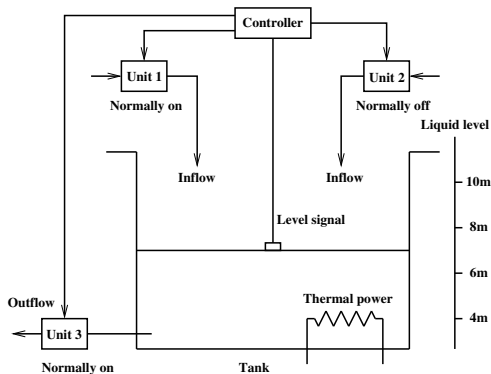
## Modèle PDMP

- ▶ Espace d'états  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $E_1 = E_2 = [0, 10^5[$ ,  
 $E_3 = E_4 = E_5 = \Delta$
- ▶ Flot  $\phi_m(y, t) = y + t$ ,  $m = 1, 2$
- ▶ Intensité et noyau de saut
  - ▶  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3$  Weibull
  - ▶  $1 \rightarrow 4$ ,  $2 \rightarrow 4, 5$  Exponentielle

# Réservoir chauffé

$$X_t = (m_t, h_t, \theta_t)$$

- ▶  $m_t$  : état des unités
- ▶  $(h_t, \theta_t)$  : hauteur et température du liquide



Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

Fiabilité dynamique

**Mécanique**

Biologie

Neurosciences

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Problème de corrosion

[Astrium] Description

## Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

- ▶ support pour les équipements du missile
- ▶ structure de petite taille : un seul point de mesure
- ▶ longue durée de vie → surveillance de la perte d'épaisseur par corrosion

**Profil d'emploi** : Stockage dans 3 environnements différentes avec durées **aléatoires**

1. atelier
2. sous-marin nucléaire en mission
3. sous-marin en cale sèche



# Problème de corrosion

[Astrium] Dynamique

- ▶ Succession déterministe des environnements :  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement  $i$  loi  $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibull
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement  $i$  :

$$d_t = \rho_i \left( t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶  $\rho_i$  taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement  $i$
- ▶  $\eta_i$  durée de transition déterministe dans l'environnement  $i$ .



# Problème de corrosion

[Astrium] Modélisation PDMP

$$X_t = (m_t, Y_t)$$

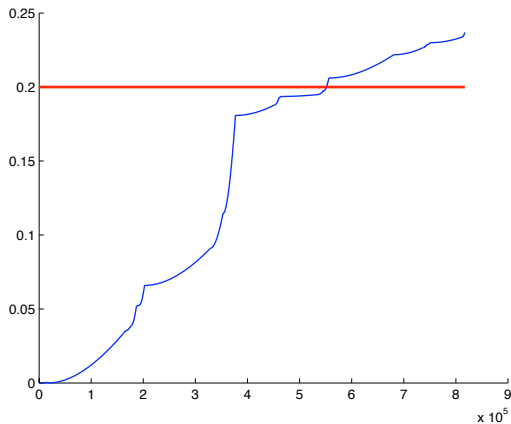
- ▶  $m_t$  : environnement
- ▶  $Y_t$  :  $(\gamma_t, a_t)$  protection restante et temps  
ou  $(d_t, \rho_t, a_t)$  épaisseur perdue, taux de corrosion et temps

## Modèle PDMP

- ▶ Espace d'états Modes  $M = \{1, 2, 3\} \times \{0, 1\}$ ,  
 $E_{(m,0)} = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ ,  $E_{(m,1)} = \mathbb{R}^+ \times [\rho_m^-, \rho_m^+] \times \mathbb{R}^+$
- ▶ Flot  $\phi_{(m,0)}(\gamma, a, s) = (\gamma - s, a + s)$   
 $\phi_{(m,1)}(d, \rho, a, s) = (d + d_i(\rho, a + s) - d_i(\rho, a), \rho, a + s)$
- ▶ Intensité constante dans chaque mode
- ▶ Noyau de saut succession déterministe des environnements  
 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$ , tirage du nouveau taux de corrosion

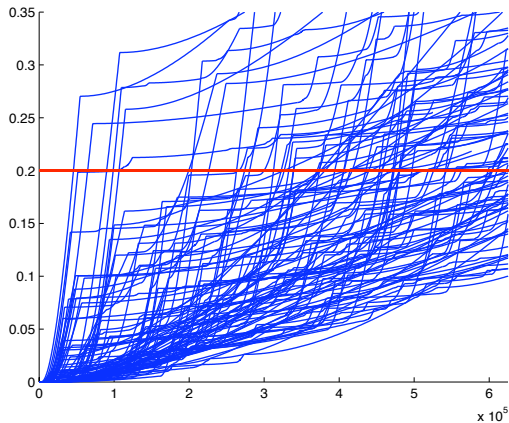
# Problème de corrosion

[Astrium] Exemples de trajectoires simulées



# Problème de corrosion

[Astrium] Exemples de trajectoires simulées



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

Fiabilité dynamique

Mécanique

**Biologie**

Neurosciences

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

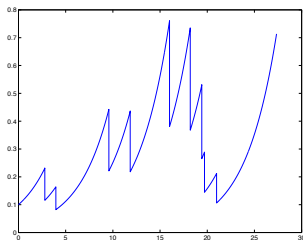
Références

# Division cellulaire

[N. Krell]

$X_t$  taille d'une bactérie au temps  $t$

- ▶ Espace d'états  $[0, \infty[$
- ▶ Flot Croissance exponentielle  $\phi(x, t) = xe^{\tau t}$
- ▶ Intensité Proportionnelle à la taille  $\lambda(x) = \alpha x$
- ▶ Noyau de saut Division en 2  $Q(x, x/2) = 1$



# Division cellulaire

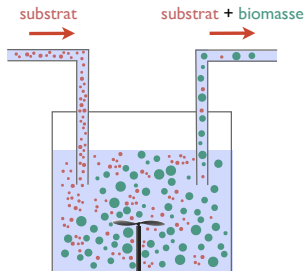
[C. Fritsch]

$X_t$  masse d'une population de bactéries au temps  $t$

- ▶ mode = nombre de cellules
- ▶ espace d'état  $E_m =$  mesure ponctuelles prenant  $m$  valeurs

## Dynamique

- ▶ croissance exponentielle des bactéries (en fonction du substrat)
- ▶ division des bactéries
- ▶ soutirage



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Trafic internet

Fiabilité dynamique

Mécanique

Biologie

Neurosciences

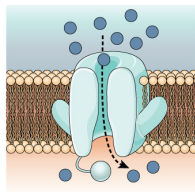
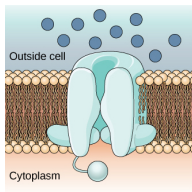
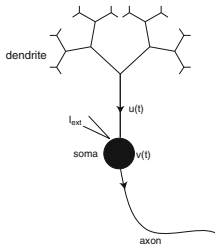
Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Potentiel électrique le long d'un neurone

## Canaux ioniques



## Canaux ioniques

- ▶ Potassium
- ▶ Ouverts ou Fermés



# Potentiel électrique le long d'un neurone

## Modèle déterministe

### Modèle de Morris-Lecar

- ▶  $V$  potentiel électrique
- ▶  $m$  proportion de canaux  $K^+$  ouverts

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}(I - I_{ion}(m, V))$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_{\infty}(V) - m}{\tau_{\infty}(V)}$$

$$I_{ion}(m, V) = G_{Ca}m_{\infty}(V)(V - E_{Ca}) + G_Km(V - E_K) + G(V - V_{rest})$$

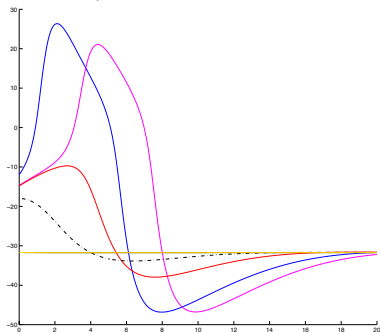
$$m_{\infty}(V) = \frac{1 + \tanh((V+1)/15)}{2}, \quad \tau_{\infty}(V) = \frac{5}{\cosh(V/60)}$$

# Potentiel électrique le long d'un neurone

## Modèle déterministe

Trajectoires de  $V$  ( $m = m_{eq} = 0.1078$ )

- $V_0 = -12$
- $V_0 = -14.7$
- $V_0 = -14.8$
- $V_0 = -18$
- $V_0 = V_{eq} = -31.70$



# Potentiel électrique le long d'un neurone

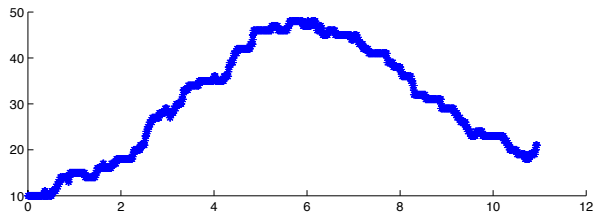
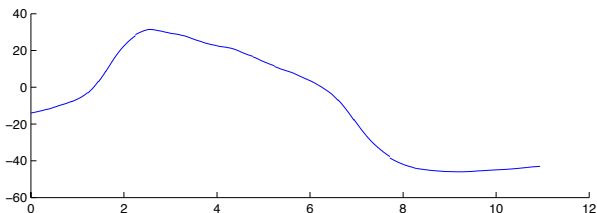
## Modèle PDMP

### Canaux ioniques

- ▶ **Potassium** : mouvement lent : **stochastique**  $N$  canaux  
 $m \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$  proportion de canaux  $K^+$  **ouverts**
  
- ▶ Mode  $m \in \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$
- ▶ **Intensité individuelle**
  - ▶ ouverture d'un canal à intensité  $\alpha(V) = \frac{m_\infty(V)}{\tau_\infty(V)}$
  - ▶ fermeture d'un canal à intensité  $\beta(V) = \frac{1-m_\infty(V)}{\tau_\infty(V)}$
- ▶ **Intensité globale**  
 $\lambda(m, V) = N(m\beta(V) + (1 - m)\alpha(V))$
- ▶ **Noyau de saut**  $m \rightarrow m \pm 1/N$

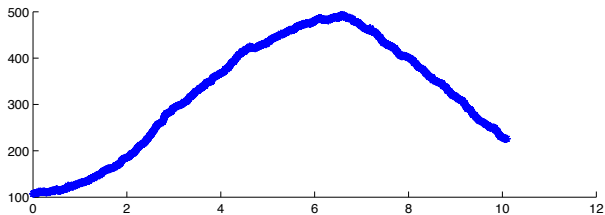
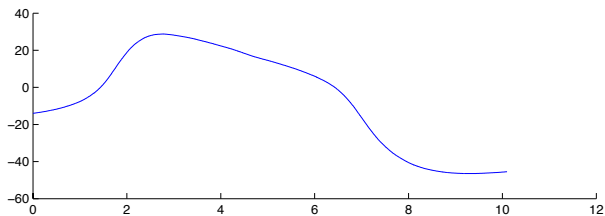
# Potentiel électrique le long d'un neurone

$$N = 100, V_0 = -14, m_0 = 0.1$$



# Potentiel électrique le long d'un neurone

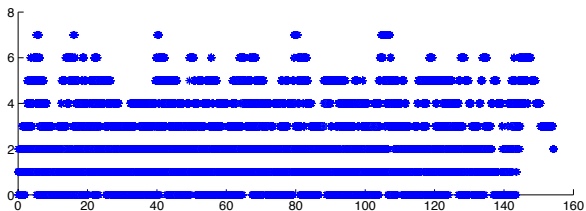
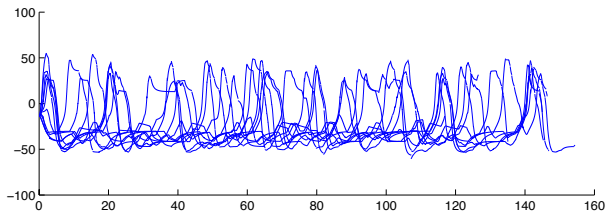
$$N = 1000, V_0 = -14, m_0 = 0.108$$



# Potentiel électrique le long d'un neurone

Dispersion de 10 trajectoires aléatoires

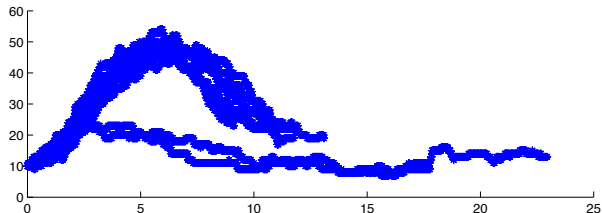
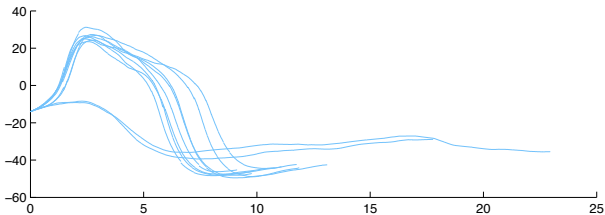
$$N = 10, V_0 = -14, m_0 = 0.1$$



# Potentiel électrique le long d'un neurone

Dispersion de 10 trajectoires aléatoires

$$N = 100, V_0 = -14, m_0 = 0.10$$



# Construire un PDMP

Equations **déterministes** (physique, chimie, biologie, . . .)

+ un mécanisme de sauts **aléatoire**

- ▶ changement ponctuel d'environnement, de paramètres, pannes
- ▶ petite population

## Avantages

- ▶ **faciles à définir** de façon itérative (pas besoin de calcul stochastique...)
- ▶ **faciles à interpréter** : description du comportement physique
- ▶ modèle très **souple**



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Préliminaire : simuler la loi exponentielle

Inversion de la fonction de répartition

Méthodes de rejet

Pourquoi les simuler ?

Références

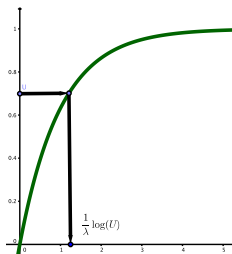
# Simulation d'une loi exponentielle

## Inversion de la fonction de répartition

Si  $U \sim \text{Unif}[0, 1]$  alors  $-\frac{1}{\lambda} \log(U) \sim \text{Exp}(\lambda)$

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda} \log(U) > t\right) &= \mathbb{P}(\log(U) < -\lambda t) \\ &= \mathbb{P}(U < \exp(-\lambda t)) \\ &= \exp(-\lambda t)\end{aligned}$$



## Simulation d'un minimum de lois exponentielles

$X_1, \dots, X_n$  lois exponentielles **indépendantes** de paramètre respectif  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , correspondant à la survenue d'événements de type 1 à  $n$

Simuler  $T = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $I$  l'indice de la variable qui réalise le minimum

### Pour simuler $T$ et $I$

Il est **équivalent** de

- ▶ Simuler  $X_1, \dots, X_n$  et prendre leur minimum, choisir l'indice correspondant
- ▶ Simuler **une seule** loi  $Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$  et choisir **indépendamment**  $i$  avec probabilité  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité constante

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T$  et  $I$  sont **indépendantes**,

$T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

### Preuve

$$\mathbb{P}(T > t, I = X) = \mathbb{P}(X > t, Y > X)$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité constante

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T$  et  $I$  sont **indépendantes**,

$T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t, I = X) &= \mathbb{P}(X > t, Y > X) \\ &= \int_t^\infty \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} \lambda e^{-\lambda x} dy dx\end{aligned}$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité constante

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T$  et  $I$  sont **indépendantes**,

$T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t, I = X) &= \mathbb{P}(X > t, Y > X) \\ &= \int_t^\infty \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} \lambda e^{-\lambda x} dy dx \\ &= \int_t^\infty e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx\end{aligned}$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité constante

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T$  et  $I$  sont **indépendantes**,

$T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X) = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

### Preuve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t, I = X) &= \mathbb{P}(X > t, Y > X) \\ &= \int_t^\infty \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} \lambda e^{-\lambda x} dy dx \\ &= \int_t^\infty e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-(\lambda + \mu)t} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\end{aligned}$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité variables

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$ .

### Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$



# Minimum de lois exponentielles

## Intensité variables

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$ .

### Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité variables

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$ .

### Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

$$= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité variables

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$ .

### Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

$$= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du$$

$$= \int_t^\infty \frac{\lambda(\phi(x, u))}{\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))} (\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))) e^{-\int_0^u (\lambda(\phi(x, s)) + \mu(\phi(x, s))) ds} du$$

# Minimum de lois exponentielles

## Intensité variables

### Théorème

Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$ ,  $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors  $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$  et  $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t))}$ .

### Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

$$= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du$$

$$= \int_t^\infty \frac{\lambda(\phi(x, u))}{\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))} (\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))) e^{-\int_0^u (\lambda(\phi(x, s)) + \mu(\phi(x, s))) ds} du$$

$$= \int_t^\infty \mathbb{P}(I = X | T = u) \mathbb{P}(T \in du)$$

# Simulation d'un minimum de lois exponentielles

## Intensité variable

$X_1, \dots, X_n$  v.a. indépendantes d'intensité respective  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , correspondant à la survenue d'événements de type 1 à  $n$

$T = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $I$  l'indice de la variable qui réalise le minimum

### Pour simuler $T$ et $I$

Il est équivalent de

- ▶ Simuler  $X_1, \dots, X_n$  et prendre leur minimum, choisir l'indice correspondant
- ▶ Simuler une seule loi d'intensité  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  et une fois  $T = t$  tiré choisir  $i$  avec probabilité  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}(\phi(x, t))$

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Préliminaire : simuler la loi exponentielle

Inversion de la fonction de répartition

Méthodes de rejet

Pourquoi les simuler ?

Références

# Inversion de la fonction de répartition

## Solution à privilégier quand c'est possible

- ▶ Si on sait **calculer explicitement** la fonction de répartition **le long du flot**
- ▶ Et si on sait **l'inverser explicitement**

# Inversion de la fonction de répartition

## Exemples

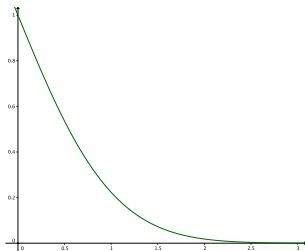
- TCP  $\lambda \circ \phi(x, t) = x + t$

Fonction de survie

$$\mathbb{P}(T > t) = \exp(-xt - t^2/2)$$

Inverse

$$f(U) = -x + \sqrt{x^2 - 2 \log(U)}$$





# Inversion de la fonction de répartition

## Exemples

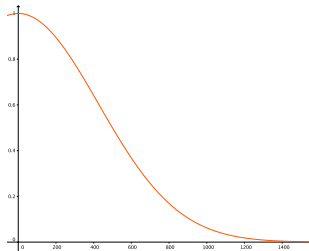
- Loi de Weibull (climatisation, atelier)  $\lambda \circ \phi(x, t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x+t}{\beta}\right)^{\alpha-1}$   
pour  $x = 0$

Fonction de survie

$$\mathbb{P}(T > t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right)$$

Inverse

$$f(U) = \beta(-\log(U))^{1/\alpha}$$

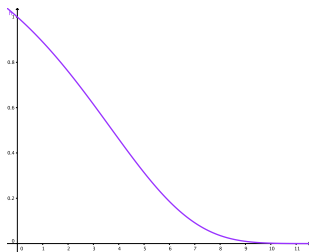


# Inversion de la fonction de répartition

## Exemples

- **Division cellulaire**  $\lambda \circ \phi(x, t) = \alpha x e^{\tau t}$   
 Fonction de survie Inverse

$$\mathbb{P}(T > t) = \exp\left(-\frac{\alpha x}{\tau}(e^{\tau t} - 1)\right) \quad f(U) = \frac{1}{\tau} \log\left(1 - \frac{\tau}{\alpha x} \log(U)\right)$$



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Préliminaire : simuler la loi exponentielle

Inversion de la fonction de répartition

Méthodes de rejet

Pourquoi les simuler ?

Références

# Rejet à base de loi de Poisson

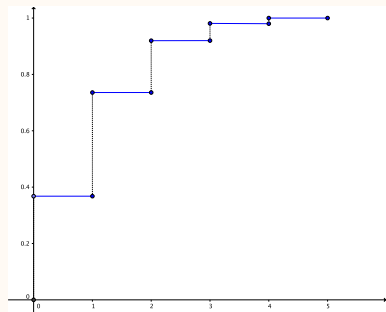
## Simuler la loi de Poisson

$T$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si

$$\mathbb{P}(T = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Simulation de la loi de Poisson de paramètre $\lambda$

- ▶ Initialisation  $i \leftarrow 0$ ,  $p \leftarrow e^{-\lambda}$ ,  $F \leftarrow p$ , stop  $\leftarrow 0$
- ▶ Tant que stop=0 faire
  - ▶ tirer  $U \sim Unif[0, 1]$
  - ▶ Si  $U < F$  faire
    - ▶ renvoyer  $i$
    - ▶ stop  $\leftarrow 1$
  - ▶ Sinon faire
    - ▶  $p \leftarrow \lambda \frac{p}{i+1}$
    - ▶  $F \leftarrow F + p$
    - ▶  $i \leftarrow i + 1$



# Rejet à base de loi de Poisson

[Cocozza] Simuler une intensité variable

## Simulation de la loi d'intensité variable $\lambda(x)$

- ▶ Initialisation choisir  $A > 0$ ,  $a \leftarrow 0$ ,  $S \leftarrow \emptyset$
- ▶ Tant que  $S = \emptyset$  faire
  - ▶ choisir  $L \geq \sup_{a \leq x \leq a+A} \lambda(x)$
  - ▶ tirer  $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$
  - ▶ Si  $N \neq 0$  faire
    - ▶ Pour  $1 \leq k \leq N$  faire
      - tirer  $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$
      - tirer  $V \sim \text{Unif}[0, L]$
      - Si  $U \leq V$  faire  $S \leftarrow S \cup \{U\}$
  - ▶  $a \leftarrow a + A$
- ▶ renvoyer  $\min S$

# Rejet à base de loi de Poisson

## Exemple de Morris Lecar

$N = 100$ , Point de départ :  $m_0 = 0.1 = 10/100$ ,  $V_0 = -14$   
 Intensité **le long du flot** à simuler pour le **premier** temps de saut

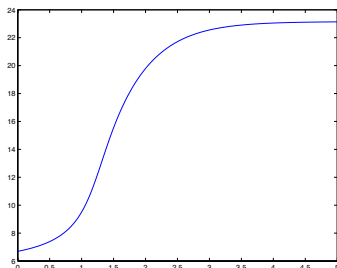
$$\lambda(m, V) = N \left( m \frac{1 - m_\infty(V)}{\tau_\infty(V)} + (1 - m) \frac{m_\infty(V)}{\tau_\infty(V)} \right)$$

$$m_\infty(V) = \frac{1 + \tanh((V+1)/15)}{2}$$

$$0 \leq m_\infty \leq 1$$

$$\tau_\infty(V) = \frac{5}{\cosh(V/60)}$$

non minoré

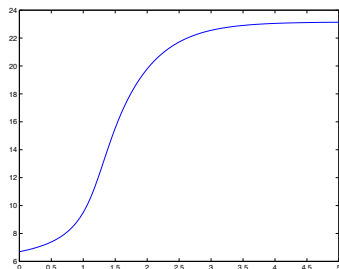


# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.5$

▶  $a = 0$

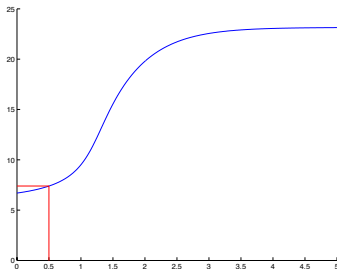


# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.5$

- ▶  $a = 0$
- ▶  $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$   
calculé numériquement  
(pas =  $10^{-3}$ )  $L = 7.39$
- ▶
- ▶



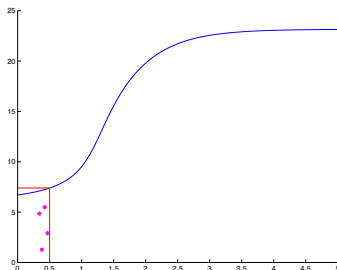


# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.5$

- ▶  $a = 0$
- ▶  $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$   
calculé numériquement  
(pas =  $10^{-3}$ )  $L = 7.39$
- ▶ tirer  $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$ ,  
 $N = 4$ , tirer  $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$ ,  
tirer  $V \sim \text{Unif}[0, L]$
- ▶

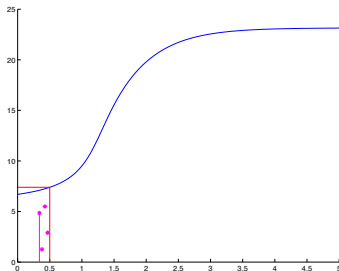


# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.5$

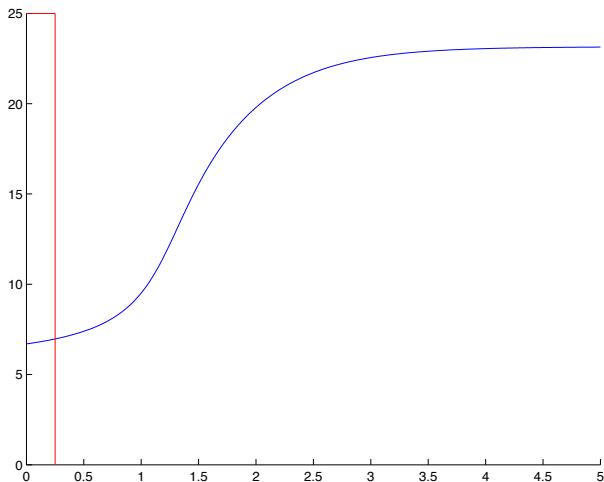
- ▶  $a = 0$
- ▶  $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$   
calculé numériquement  
(pas =  $10^{-3}$ )  $L = 7.39$
- ▶ tirer  $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$ ,  
 $N = 4$ , tirer  $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$ ,  
tirer  $V \sim \text{Unif}[0, L]$
- ▶ sélectionner la plus petite  
abscisse des points sous la  
courbe 0.3394



# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

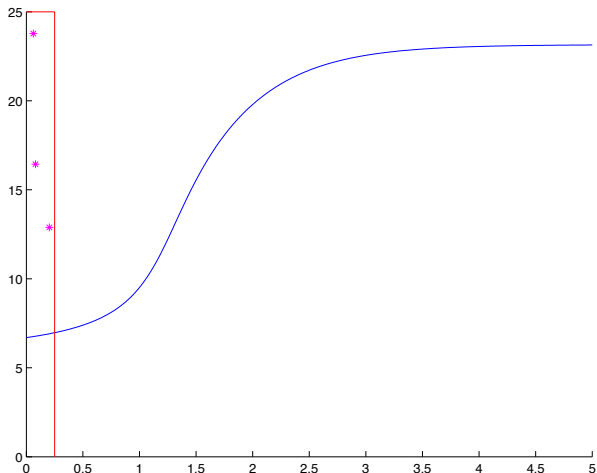
Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.25$ ,  $L = 25$  majorant global



# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

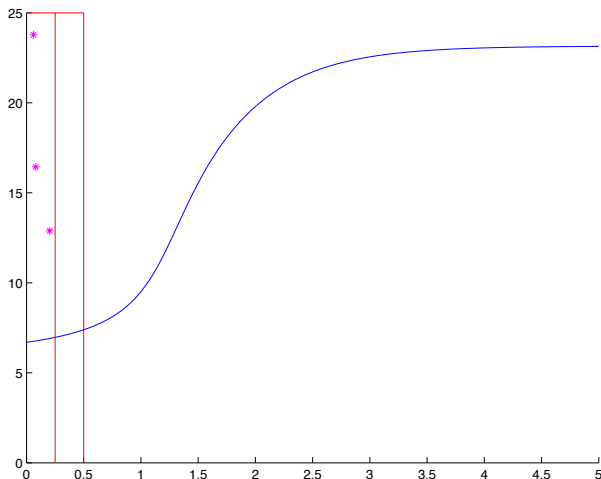
Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.25$ ,  $L = 25$  majorant global



# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

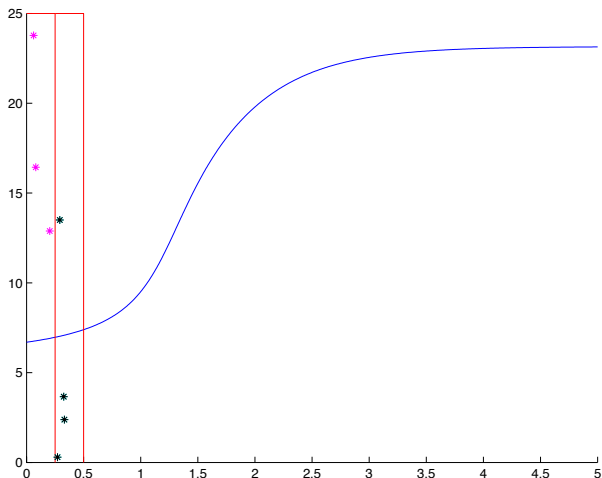
Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.25$ ,  $L = 25$  majorant global



# Rejet à base de loi de Poisson

Exemple de Morris Lecar

Mise en oeuvre de l'algorithme  $A = 0.25$ ,  $L = 25$  majorant global



# Rejet à base de loi de Poisson

## Bilan

### Avantages

- ▶ Uniquement besoin d'un maximum local
- ▶ Simulation exacte si le flot est connu
- ▶ Marche avec les intensités individuelles et l'intensité globale

### Inconvénients

- ▶ Calculer un maximum local / global
- ▶ Nombre d'itérations inconnu, aléatoire
- ▶ Si flot numérique, nombre d'appels à la fonction flot inconnu, aléatoire, Simuler séparément les temps de sauts et la trajectoire le long du flot

# Rejet à base de loi exponentielle

Dans quels cas ?

Algorithme de type **Gillespie**

- ▶ un **grand** nombre d'événements concurrents (bcp de cellules qui se divisent, bcp de canaux ioniques)
- ▶ utilise l'intensité **individuelle** (taux de division/soutirage, taux d'ouverture/fermeture d'un canal), tous les individus doivent avoir la même
- ▶ **majorant** de l'intensité individuelle
- ▶ calcule **simultanément** le flot et les sauts : utile pour les flots numériques
- ▶ algorithme de rejet : **nombre d'itérations** inconnu, aléatoire



# Rejet à base d'exponentielle

## Modèle de Morris Lecar

### Simulation de la trajectoire $(X_t = (m_t, V_t))$ d'un PDMP

#### Paramètres

- ▶  $x_0 = (m_0, v_0)$  point de départ du processus
- ▶  $\bar{\lambda} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = 0.25$  majorant de l'intensité individuelle (pour  $V$  raisonnable)
- ▶  $T_{max}$  temps jusqu'auquel simuler
- ▶  $N$  nombre de canaux

# Rejet à base d'exponentielle

Modèle de Morris Lecar

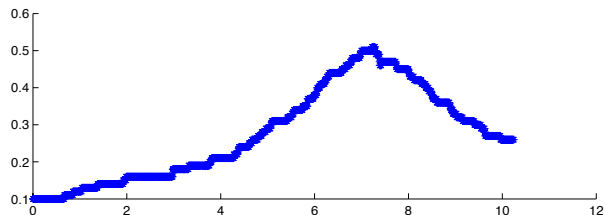
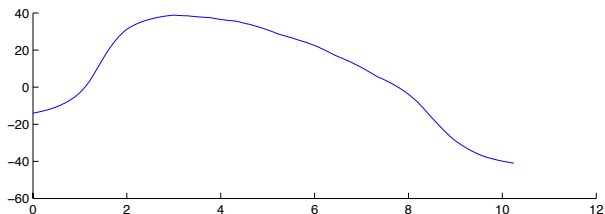
Simulation de la trajectoire  $(X_t = (m_t, V_t))$  d'un PDMP

## Algorithme

- ▶ Initialisation  $t \leftarrow 0$   $m \leftarrow m_0$   $v \leftarrow v_0$
- ▶ Tant que  $t < T_{max}$  faire
  - ▶ tirer  $T \sim \text{Exp}(N\bar{\lambda})$
  - ▶ calculer le flot sur  $[t, t + T]$
  - ▶  $t \leftarrow t + T$ ,  $v \leftarrow \phi_m(v, t)$
  - ▶ tirer  $U \sim \text{Unif}[0, 1]$
  - ▶ Si  $U \leq \frac{m * \alpha(v)}{\bar{\lambda}}$  faire
    - ▶  $m \leftarrow m + 1/N$  ouverture d'un canal
  - ▶ Sinon si  $U \leq \frac{m * \alpha(v) + (1-m) * \beta(v)}{\bar{\lambda}}$  faire
    - ▶  $m \leftarrow m - 1/N$  fermeture d'un canal
- ▶ renvoyer la trajectoire

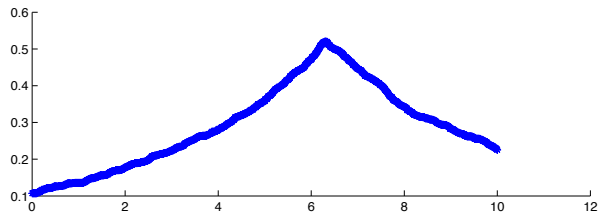
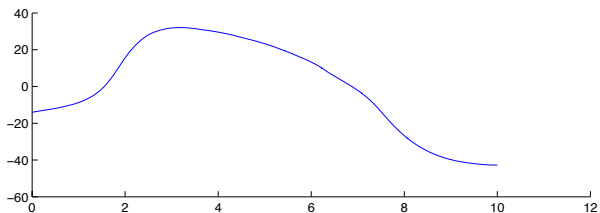
# Potentiel électrique le long d'un neurone

$$N = 100, V_0 = -14, m_0 = 0.1$$



# Potentiel électrique le long d'un neurone

$$N = 1000, V_0 = -14, m_0 = 0.108$$



# Quand le flot n'est pas explicite

## En pratique

- ▶ on remplace par une approximation numérique et on applique l'une des méthodes de simulation

## En théorie

- ▶ quasiment pas de résultat sur l'erreur qu'on commet : modifier le flot modifie  $t^*$ , l'intensité le long du flot, le point de départ pour la noyau de saut... La régularité du flot ne suffit probablement pas à ce que tout se passe bien

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

**Pourquoi les simuler ?**

Quantification optimale

Temps de sortie

Optimisation

Résultats théoriques

Références

# Méthodes numériques pour les PDMP

- ▶ fort potentiel d'applications
- ▶ nombreux résultats théoriques  
[Davis 93], [Jacobsen 06], [Costa-Dufour 13]
- ▶ processus faciles à simuler
- ▶ méthodes d'approximation numérique dédiées basées sur des discrétisations intelligentes et les simulations

## Objectif des travaux présentés

Proposer des **méthodes numériques**

- ▶ adaptées aux **spécificités** des PDMP
- ▶ avec des **preuves** (et des vitesses) de convergence
- ▶ utilisables en **pratique**

Pour **calculer**

- ▶ la loi d'un **temps de sortie**
- ▶ un temps d'arrêt **optimal**



## Objectif des travaux présentés

Proposer des méthodes numériques

- ▶ adaptées aux spécificités des PDMP
- ▶ avec des preuves (et des vitesses) de convergence
- ▶ utilisables en pratique

Pour calculer

- ▶ la loi d'un temps de sortie
- ▶ un temps d'arrêt optimal

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Quantification optimale

Temps de sortie

Optimisation

Résultats théoriques

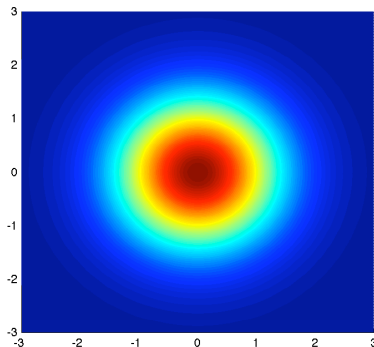
Références

# Méthode de quantification

[G. Pagès]

Approcher une loi continue par une loi discrète de façon optimisée

Exemple:  $\mathcal{N}(0, I_2)$

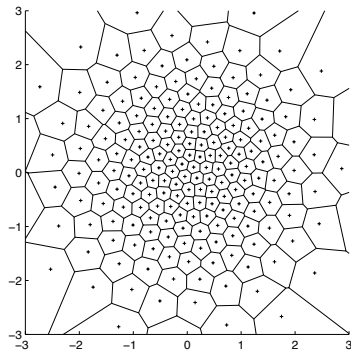


# Méthode de quantification

[G. Pagès]

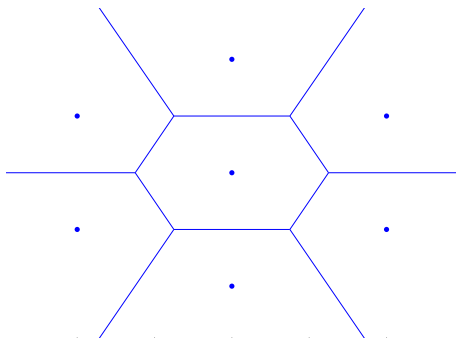
Approcher une loi continue par une loi discrète de façon optimisée

Exemple:  $\mathcal{N}(0, I_2)$



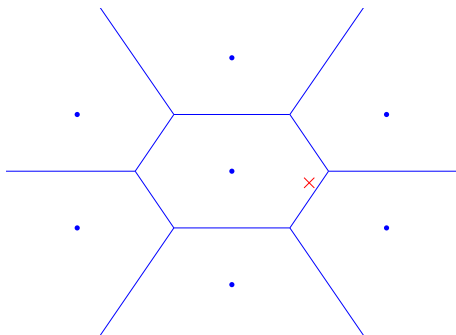
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



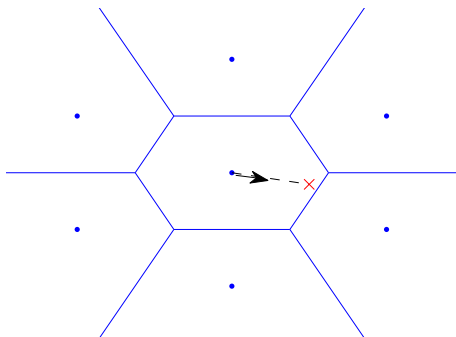
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



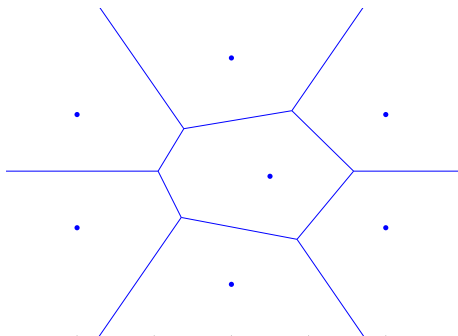
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles





# Avantages et inconvénients de la quantification

## Avantages

- ▶ un simulateur de la loi cible suffit
- ▶ construction automatique des grilles
- ▶ vitesse de convergence pour  $\mathbb{E}[|f(X) - f(\hat{X})|]$  si  $f$  Lipschitz

## Inconvénients

- ▶ temps de calcul des grilles
- ▶ fléau de la dimension
- ▶ questions ouvertes sur la convergence des algorithmes

# Quantifier un PDMP

Utiliser la chaîne induite  $(Z_n, S_n)$

- ▶  $Z_n$  mode et position après le  $n$ -ème saut
- ▶  $S_n = T_n - T_{n-1}$  durée entre le saut  $n - 1$  et le saut  $n$

# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

**Pourquoi les simuler ?**

Quantification optimale

Temps de sortie

Optimisation

Résultats théoriques

Références

# Approximation de la loi d'un temps de sortie

$U \subset E$ ,  $X_0 \in U$ . Temps de sortie de  $U$  :

$$\tau = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin U\}$$

## Objectif

Proposer une méthode numérique pour approcher la loi de  $\tau$

$$s \longmapsto \mathbb{P}(\tau > s)$$

## Application

Calculer la durée de service de la structure métallique : temps de sortie de  $[0, 0.02]$ .

# Formulation récursive du problème

Constat  $\{\tau \leq T_{k+1}\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}$

Conséquence : calcul récursif de  $\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_n)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_{k+1}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_k) \mathbb{P}(\tau \leq T_k) + \mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})}{\mathbb{P}(\tau \leq T_{k+1})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_0) = 0$$

# Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶  $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶  $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

# Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶  $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶  $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov  $(Z_n, T_n)$

# Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶  $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶  $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$   
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov  $(Z_n, T_n)$



# Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶  $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶  $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$   
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov  $(Z_n, T_n)$
- ▶ Discrétiser la chaîne de Markov  $(Z_n, T_n)$  par quantification

## Mise en œuvre de la stratégie

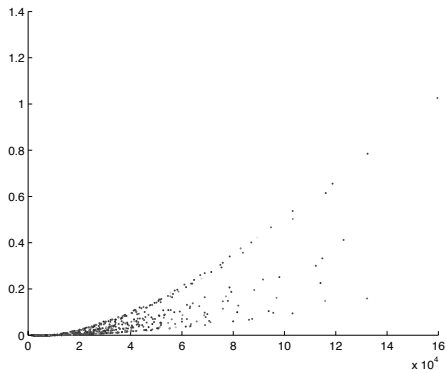
- ▶ Remplacer  $(Z_n, T_n)$  par son approximation **quantifiée**  $(\hat{Z}_n, \hat{T}_n)$
- ▶ Prouver la convergence de la méthode sous des hypothèses lipschitz

### Points difficiles

- ▶ si  $Z_k \in U$ , on n'a pas forcément  $\hat{Z}_k \in U \implies$  hypothèse de **convexité** sur  $U$
- ▶ besoin de contrôler la probabilité de sauter près de la frontière de  $U$
- ▶ dénominateur dans la relation de récurrence

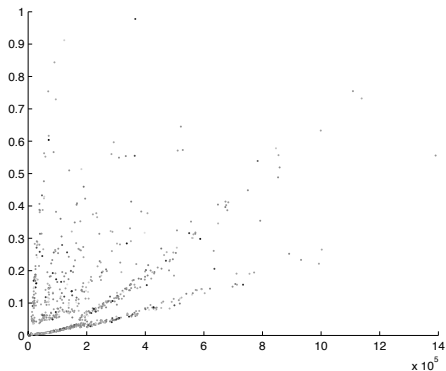
# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 2 après le 1er saut



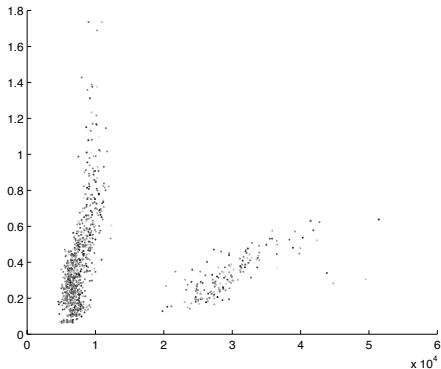
# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 3 après le 2ème saut



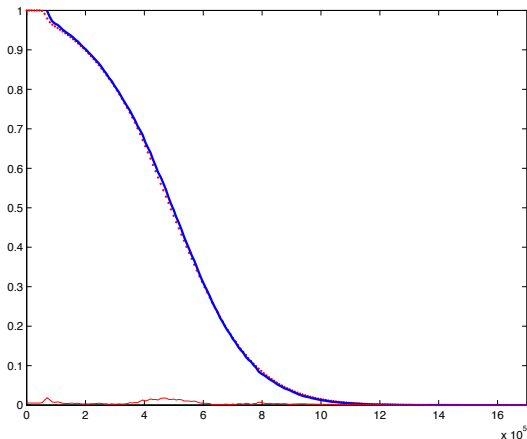
# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 1 après le 15ème saut



# Résultats numériques : modèle de corrosion

$U = [0, 0.2]mm$ ,  $\tau$ =durée de service de la structure



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

**Pourquoi les simuler ?**

Quantification optimale

Temps de sortie

**Optimisation**

Résultats théoriques

Références

# Motivation : maintenance préventive

## Machine pouvant tomber en panne

### Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale



# Motivation : maintenance préventive

## Machine pouvant tomber en panne

### Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

### Problème mathématique

- ▶ arrêt optimal
- ▶ contrôle impulsionnel

# Problème d'arrêt optimal

- ▶ Fonction de performance  $g$
- ▶ Horizon aléatoire :  $N$ -ème temps de saut  $T_N$  du PDMP
- ▶  $\mathcal{M}_N$  ensemble des temps d'arrêt  $\tau \leq T_N$

## Problème d'arrêt optimal

- ▶ calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- ▶ trouver un temps d'arrêt  $(\varepsilon)$ -optimal  $\tau^*$  qui atteint  $V(x)(-\varepsilon)$

# Écriture récursive des fonctions

[Gugerli]

## Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶  $v_N = g$
- ▶  $v_n = L(v_{n+1}, g)$  pour  $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

$$\begin{aligned}
 &L(w, g)(x) \\
 &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ w(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n = x \right] \right\} \\
 &\quad \vee \mathbb{E} [w(Z_{n+1}) \mid Z_n = x]
 \end{aligned}$$

# Construction itérative de variables aléatoires

## Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶  $v_N(Z_N) = g(Z_N)$
- ▶  $v_n(Z_n) = L(v_{n+1}, g)(Z_n)$  pour  $n \leq N - 1$

$$v_0(Z_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

$$\begin{aligned} v_n(Z_n) &= L(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [v_{n+1}(Z_{n+1}) \mid Z_n] \end{aligned}$$

# Discrétisation

## Approximation de la fonction valeur

- ▶  $\widehat{v}_N(\widehat{Z}_N) = g(\widehat{Z}_N)$
- ▶  $\widehat{v}_n(\widehat{Z}_n) = \widehat{L}_d(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n)$  pour  $n \leq N - 1$

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_d(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v(\widehat{Z}_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \widehat{Z}_n \right] \right\} \\ & \quad \vee \mathbb{E} [v(Z_{n+1}) \mid \widehat{Z}_n] \end{aligned}$$

# Vitesse de convergence

## Théorème

Hypothèses de régularité **Lipschitz** sur  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $Q$ ,  $t^*$  et  $g$

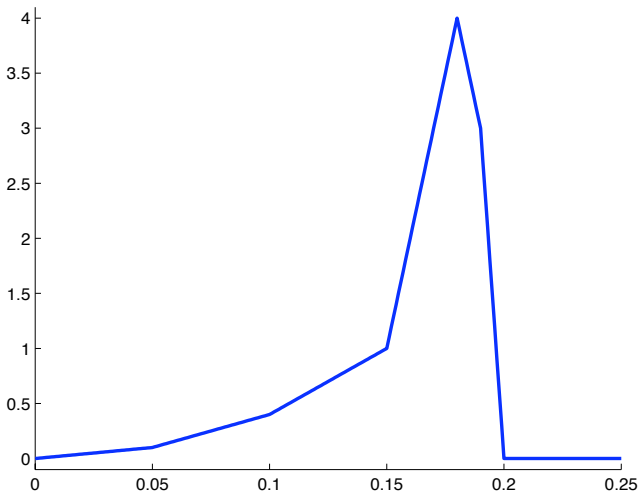
$$|v_0(x) - \widehat{v}_0(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

$C$  constante explicite,  
 $EQ$  erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$  due aux **indicatrices**

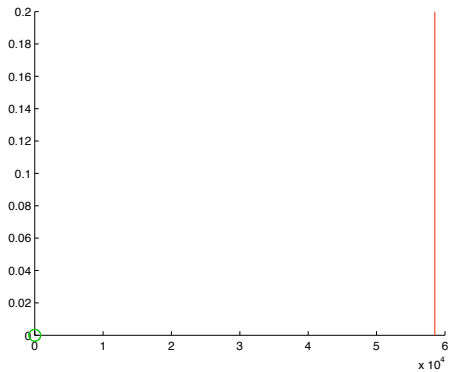
# Fonction de performance

## Exemple de la corrosion



# Règle d'arrêt itérative

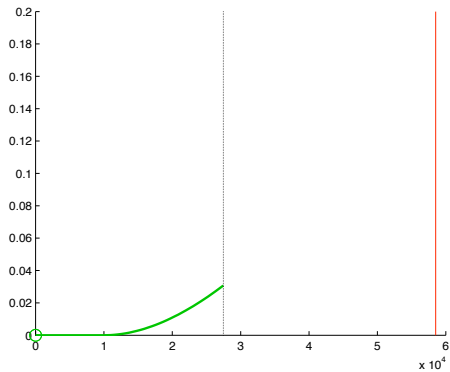
## Exemple de la corrosion





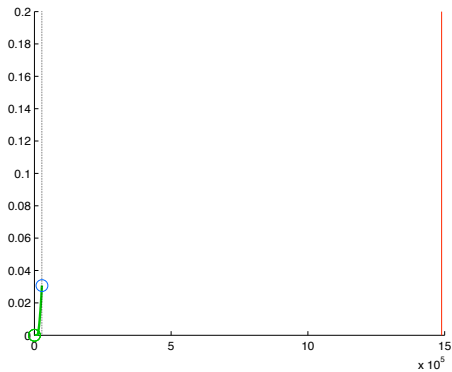
# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



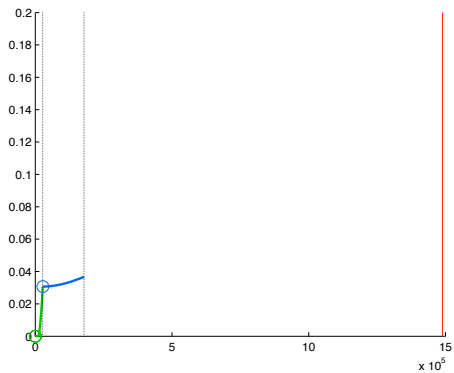
# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



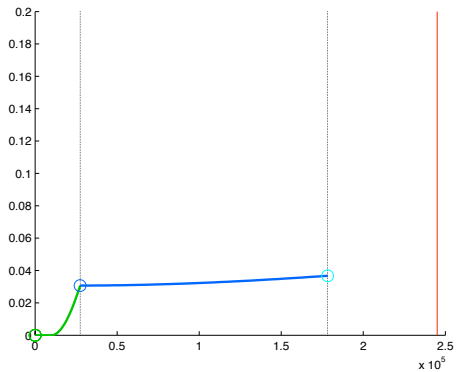
# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



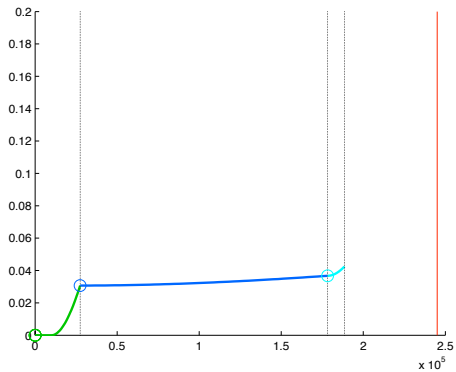
# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



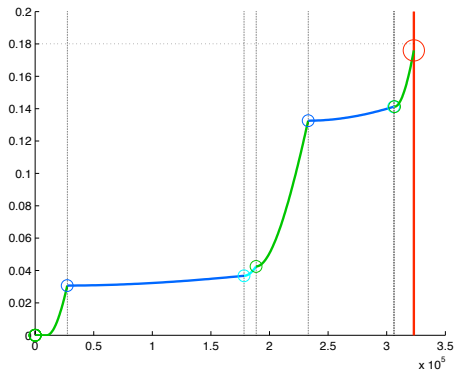
# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



# Règle d'arrêt itérative

## Exemple de la corrosion



# Calcul de la fonction valeur

## Exemple de la corrosion

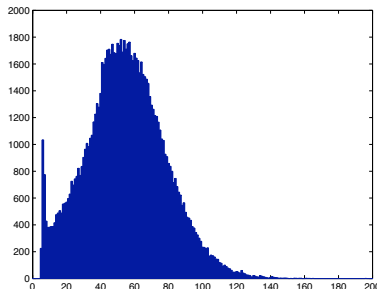
### Résultats numériques (vraie valeur : 4)

Nombre de points dans les grilles de quantification	Fonction valeur approchée	Fonction valeur par Monte Carlo
10	2.48	0.94
50	2.70	1.84
100	2.94	2.10
200	3.09	2.63
500	3.39	3.15
1000	3.56	3.43
2000	3.70	3.60
5000	3.82	3.73
8000	3.86	3.75

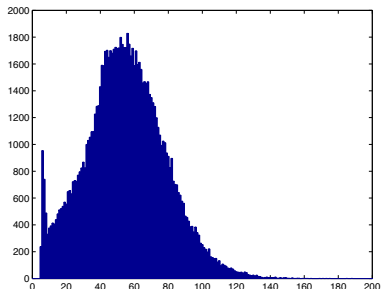
# Comparaison avec Monte Carlo

## Exemple de la corrosion

Temps d'arrêt optimal  $\tau^* = \inf\{t : d_t \geq 0.02\}$



temps d'arrêt approché



temps d'arrêt théorique

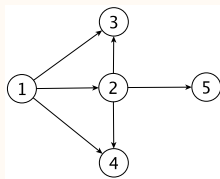


# Problème industriel de Thales optronique

## Exemple de la climatisation

Calculer une **date de maintenance** pour un équipement soumis à différents types de **pannes**

### Goupe de climatisation



- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

# Fonction de performance

## Exemple de la climatisation

$$g(m, t) = \frac{t}{p(m)}$$

- ▶  $p(1) = 6$  coût de maintenance dans l'état stable
- ▶  $p(2) = 6$  coût de maintenance pour roulement à bille dégradé
- ▶  $p(3) = 5$  coût de réparation de l'électrovanne
- ▶  $p(4) = 3.5$  coût de réparation d'une panne électronique
- ▶  $p(5) = 12$  coût de réparation du roulement à billes

### Optimisation de maintenance

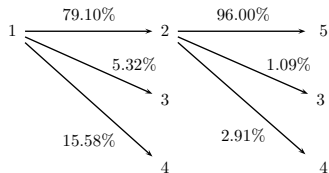
- ▶ Il vaut mieux déclencher une maintenance en mode dégradé 2 qu'attendre la panne totale 5
- ▶ Les coûts de réparation en mode 3 et 4 sont moins chers que le coût de maintenance

Performance moyenne sans maintenance : 342.72

# Performance avec maintenance optimisée

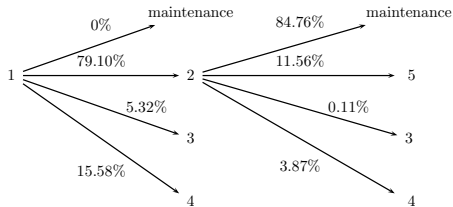
## Exemple de la climatisation

### Sans maintenance



Performance moyenne 342.72

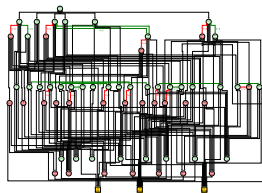
### Avec maintenance



Performance moyenne 592.47

# Autres résultats

- ▶ Approximation d'espérances
- ▶ Optimisation de maintenance du réservoir chauffé
- ▶ Arrêt optimal **partiellement observé**
- ▶ Contrôle **impulsionnel**
  - ▶ approximation de la fonction valeur
  - ▶ stratégie optimale : travaux en cours



# Plan du cours : les PDMP

Qu'est-ce que c'est ?

Qu'est-ce que ça modélise ?

Comment les simuler ?

Pourquoi les simuler ?

Références

# Références

## Livres

M. Davis Markov models and optimization

M. Jacobsen Point process theory and applications

P. Bressloff Stochastic processes in cell biology

C. Coccozza Processus stochastiques et fiabilité des systèmes

B. de Saporta, F. Dufour, H. Zhang Numerical methods for simulation and optimization of piecewise deterministic Markov processes

O. Costa, F. Dufour Continuous average control of piecewise deterministic Markov processes

# Références

Quelques personnes travaillant sur les PDMP en France

## Applications en neurosciences

Michèle Thiullen <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/thiullen/>

## Applications en biologie

Coralie Fritsch <https://coraliefritsch.wordpress.com/>

Nathalie Krell <https://perso.univ-rennes1.fr/nathalie.krell/>

## Contrôle

François Dufour <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~frdufour/>

## Convergence vers la loi invariante

Florent Malrieu <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~malrieu/>

## Statistique

Romain Azais <http://iecl.univ-lorraine.fr/~Romain.Azais/>

Projet ANR PIECE <http://wiki-math.univ-mlv.fr/pdmp/doku.php/>

MERCI