

Un problème d'allocation optimale de portefeuille avec coûts de transaction

Benoîte de Saporta

Université Montesquieu Bordeaux IV – GREΘA et IMB

CHRISTOPHETTE BLANCHET (Université de Nice)

RAJNA GIBSON (Université de Zurich)

ETIENNE TANRÉ et DENIS TALAY (INRIA Sophia Antipolis)

Séminaire Probabilités et Processus Stochastiques
Rennes – 19 mars 2007

Allocation
optimale de
portefeuille
2/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 Compraison des stratégies
 - Une stratégie efficace
 - Comparaisons

Allocation
optimale de
portefeuille
3/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 Compraison des stratégies
 - Une stratégie efficace
 - Comparaisons

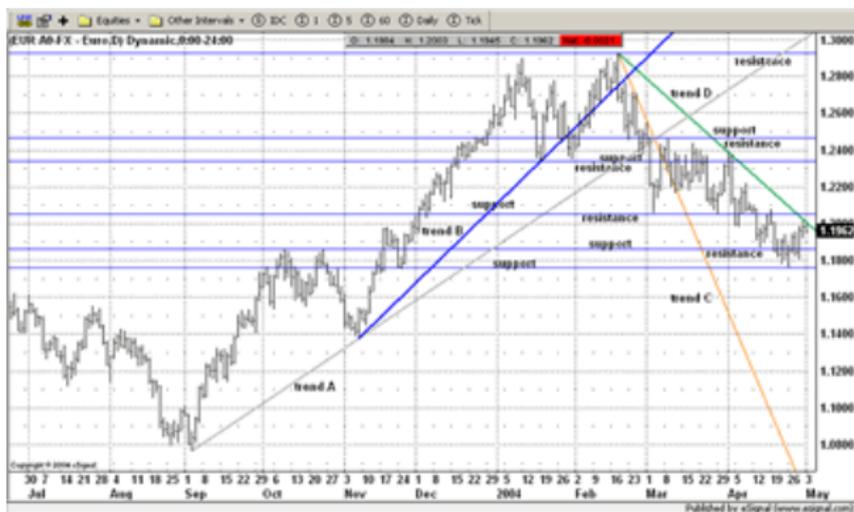
Investissement

- Approche fondamentale
 - principes économiques
- Analyse technique
 - comportement passé des prix
- Approche mathématique
 - modèles mathématiques

Objectif

Comparer les performances de l'analyse technique et de l'approche mathématique

Anticiper les hausses et les baisses à partir de l'analyse graphique du cours



cours de l'euro en dollars US, juillet 2003 – mai 2004

source : <http://www.rcforexonline.com>

Moyenne mobile

$$M_t^\delta = \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t S_u du$$

- Si $S_t > M_t^\delta$ achat
- Si $S_t < M_t^\delta$ vente

Optimiser

- la taille de la fenêtre δ
- les instants de décision



cours du dollar US en francs suisses, 23 avril 2004 – 5 mai 2004 toutes les heures
moyennes mobiles 7 heures, 17 heures, 34 heures source : <http://www.rcforexonline.com>

Marché : Actif sans risque S_t^0
Actif risqué S_t

- **stratégie** $\pi_t \in [0, 1]$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué
- **richesse** W_t^π richesse correspondant à la stratégie π

Objectif

- Modéliser la dynamique de S_t
- Résoudre le problème d'optimisation

$$\sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^\pi)]$$

Actif sans risque

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

Actif risqué

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

- B mouvement Brownien standard
- $\mu(t) \in \{\mu_1, \mu_2\}$ indépendant de B , $\mu_1 < r < \mu_2$

BLANCHET, DIOP, GIBSON, KAMINSKI, TALAY, TANRÉ (2005)

Un seul changement de dérive

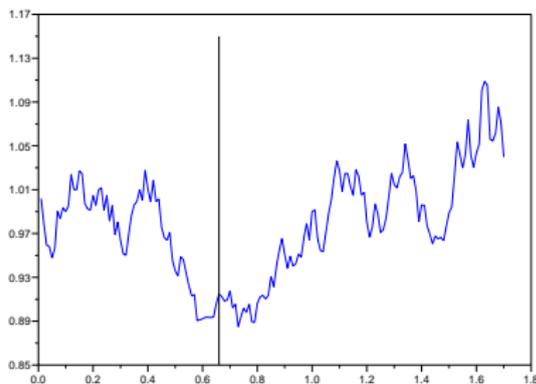
- $\mu(t) = \mu_1$ si $t < \tau$

- $\mu(t) = \mu_2$ si $t \geq \tau$

avec $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Stratégie

détecter τ



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \lambda = 2.$$

Allocation
optimale de
portefeuille
10/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- Etude théorique du problème d'optimisation
- Etude théorique de la détection de rupture
- Comparaisons numériques des stratégies
 - détection bien calibrée
 - détection mal calibrée
 - moyenne mobile

Conclusion

- Moyenne mobile meilleure si paramètres mal calibrés
- Taux d'erreur à partir duquel c'est vrai

Marché : Actif sans risque
Actif risqué

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

- $\mu(t) \in \{\mu_1, \mu_2\}$, avec plusieurs changements de valeur
- coûts de transaction

Allocation
optimale de
portefeuille
12/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique**
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 Compraison des stratégies
 - Une stratégie efficace
 - Comparaisons

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : **adapté**
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : **adapté**
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Marché : Actif sans risque $dS_t^0 = S_t^0 r dt$
 Actif risqué $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$

- **Etat** : richesse $W_t = N_t S_t + N_t^0 dS_t^0$
- **Contrôle** : proportion de la richesse investie dans l'actif risqué $\pi_t = \frac{N_t S_t}{W_t} \in [0; 1]$

Dynamique auto-financée : $dW_t^\pi = N_t dS_t + N_t^0 dS_t^0$

$$\begin{aligned} \frac{dW_t^\pi}{W_t^\pi} &= \frac{N_t S_t}{W_t^\pi} \frac{dS_t}{S_t} + \frac{N_t^0 S_t^0}{W_t^\pi} \frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= (\pi_t \mu + (1 - \pi_t) r) dt + \pi_t \sigma dB_t \end{aligned}$$

- **Critère** : espérance de l'utilité de la richesse terminale

$$U(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Fonction valeur

$$V(t, x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) + \sup_{p \in [0;1]} \mathcal{L}^p \Phi(t, x) = 0$$

$$\Phi(T, x) = U(x) = x^\alpha$$

$$\mathcal{L}^p \Phi(t, x) = x(p\mu + (1-p)r) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t, x)$$

Comme $U(W_T^{t,x,\pi}) = U(x W_T^{t,1,\pi}) = x^\alpha U(W_T^{t,1,\pi})$, on cherche une solution de la forme $\Phi(t, x) = x^\alpha \varphi(t)$

$$0 = \varphi'(t) + \varphi(t) \sup_{p \in [0;1]} \left\{ \alpha(p\mu + (1-p)r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p^2 \sigma^2 \right\}$$

$$1 = \varphi(T)$$

Solution

$$\Phi(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= \sup_{p \in [0;1]} \left\{ \alpha(p\mu + (1-p)r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p^2 \sigma^2 \right\} \\ &= \alpha r + \frac{\alpha(\mu-r)^2}{2(1-\alpha)\sigma^2} \end{aligned}$$

atteint en $p^* = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$

Formule d'Itô pour Φ entre t et T :

$$\Phi(T, W_T^{t,x,\pi}) = \Phi(t, x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \mathcal{L}^{\pi_u} \Phi \right) (u, W_u^{t,x,\pi}) du$$

+ martingale

$$U(W_T^{t,x,\pi}) \leq \Phi(t, x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sup_{p \in [0;1]} \mathcal{L}^p \Phi \right) (u, W_u^{t,x,\pi}) du$$

+ martingale

$$\leq \Phi(t, x) + \text{martingale}$$

Donc

$$\Phi(t, x) \geq \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

avec **égalité** lorsque $\pi_t = p^*$

Conclusion

- $V(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_t = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Conclusion

- $V(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_t = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Allocation
optimale de
portefeuille
20/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique
- 3 Cadre de travail**
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 Compraison des stratégies
 - Une stratégie efficace
 - Comparaisons

- Plusieurs changements de dérive

(ξ_{2n+1}) iid $\text{Exp}(\lambda_1)$

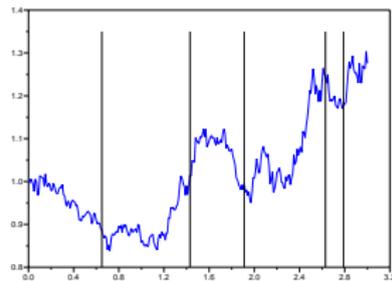
(ξ_{2n}) iid $\text{Exp}(\lambda_2)$

$\tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{if } \tau_{2n} \leq t < \tau_{2n+1} \\ \mu_2 & \text{if } \tau_{2n+1} \leq t < \tau_{2n+2} \end{cases}$$

- Coûts de transaction

- g_{01} coût d'achat
- g_{10} coût de vente



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \\ \sigma = 0.15, \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Contrôle : $\pi_t \in \{0, 1\}$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué

$$\mathcal{F}_t^S = \sigma(S_u, u \leq t)$$

π_t doit être \mathcal{F}_t^S -adapté

Problème

$$\mathcal{F}_t^S \neq \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u, u \leq t)$$

\implies Reformuler le problème de contrôle

Projection optionnelle : $F_t = \mathbb{P}(\mu(t) = \mu_1 \mid \mathcal{F}_t^S)$

$$\bar{B}_t = \frac{1}{\sigma} \left(\log \frac{S_t}{S_0} - \int_0^t (\mu_1 F_s + \mu_2(1 - F_s) - \frac{\sigma^2}{2}) ds \right)$$

Proposition

- \bar{B} est un (\mathcal{F}^S) -mouvement Brownien
- $\mathcal{F}^S = \mathcal{F}^{\bar{B}}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) dt + \sigma d\bar{B}_t$$

KURTZ, OCONE 1988

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t$$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0, 1[$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha, \alpha \in]0, 1[$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha, \alpha \in]0, 1[$

Allocation
optimale de
portefeuille
25/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur**
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 Compraison des stratégies
 - Une stratégie efficace
 - Comparaisons

Si $\pi_{t-} = 0$

$$J^0(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Si $\pi_{t-} = 1$

$$J^1(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Fonction valeur

$$V^0(t, x, f) = \sup_{\pi} J^0(t, x, f, \pi)$$

$$V^1(t, x, f) = \sup_{\pi} J^1(t, x, f, \pi)$$

Comparaison

$$\begin{aligned} V^0(t, x, f) &\geq V^1(t, (1 - g_{01})x, f) \\ V^1(t, x, f) &\geq V^0(t, (1 - g_{10})x, f) \end{aligned}$$

Continuité

Pour tous $i \in \{0; 1\}$

$$0 \leq t, \hat{t} \leq T$$

$$x, \hat{x} > 0$$

$$0 \leq f, \hat{f} \leq 1 :$$

$$\begin{aligned} &|V^i(\hat{t}, \hat{x}, \hat{f}) - V^i(t, x, f)| \\ &\leq C(1 + x^{\alpha-1} + \hat{x}^{\alpha-1})(|\hat{x} - x| + x(|\hat{f} - f| + |\hat{t} - t|^{1/2})) \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tout temps d'arrêt θ tel que $0 \leq t \leq \theta \leq T$ et pour tous x, f, i :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{\theta-}}(t, W_{\theta-}^{\theta, x, f, \pi}, F_{\theta}^{t, f})]$$

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

$$\begin{cases} \max \left\{ \frac{\partial \varphi^0}{\partial t} + \mathcal{L}_0 \varphi^0; -\varphi^0(t, x, f) + \varphi^1(t, x(1 - g_{01}), f) \right\} = 0 \\ \max \left\{ \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} + \mathcal{L}_1 \varphi^1; -\varphi^1(t, x, f) + \varphi^0(t, x(1 - g_{10}), f) \right\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \varphi(t, x, f) &= x r \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, x, f) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, x, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \varphi(t, x, f) &= x(\mu_1 f + \mu_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, f) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x, f) \\ &\quad + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, x, f) + x(\mu_1 - \mu_2) f(1 - f) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial f}(t, x, f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, x, f) \end{aligned}$$

$$(P) \quad F(t, x, v(t, x), D_t v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)) = 0$$

Définition

- v est **sous-solution de viscosité** de (P) si

$$F(\bar{t}, \bar{x}, v(\bar{t}, \bar{x}), D_t \varphi(\bar{t}, \bar{x}), D\varphi(\bar{t}, \bar{x}), D^2 \varphi(\bar{t}, \bar{x})) \leq 0$$

pour tous \bar{t}, \bar{x} et toute fonction $\varphi \in C^{1,2}$ tels que \bar{t}, \bar{x} est un maximum local de $v - \varphi$

- v est **sur-solution de viscosité** de (P) si

$$F(\bar{t}, \bar{x}, v(\bar{t}, \bar{x}), D_t \varphi(\bar{t}, \bar{x}), D\varphi(\bar{t}, \bar{x}), D^2 \varphi(\bar{t}, \bar{x})) \geq 0$$

pour tous \bar{t}, \bar{x} et toute fonction $\varphi \in C^{1,2}$ tels que \bar{t}, \bar{x} est un minimum local de $v - \varphi$

\mathcal{V}_α : ensemble des φ continues sur $[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]$ telles que $\varphi(t, 0, f) = 0$ et

$$\sup_{[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]^2} \frac{|\varphi(t, x, f) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{f})|}{(1 + x^{\alpha-1} + \hat{x}^{\alpha-1})(|x - \hat{x}| + x|f - \hat{f}|)} < \infty.$$

Théorème

(V^0, V^1) est l'unique solution de viscosité de HJB sur $\mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\alpha$ vérifiant

$$V^0(T, x, f) = V^1(T, x, f) = U(x) = x^\alpha$$

Dépendance en x :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] = x^\alpha V^i(t, 1, f)$$

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman simplifiées

$$\begin{cases} \max \left\{ \frac{\partial V^0}{\partial t} + \mathcal{L}'_0 V^0; -V^0(t, f) + (1 - g_{01})^\alpha V^1(t, f) \right\} = 0 \\ \max \left\{ \frac{\partial V^1}{\partial t} + \mathcal{L}'_1 V^1; -V^1(t, f) + (1 - g_{10})^\alpha V^0(t, f) \right\} = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}'_0 \varphi(t, f) = \alpha r \varphi(t, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, f) +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, f)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1 \varphi(t, f) = & \alpha \left(\mu_1 f + \mu_2(1 - f) + \frac{(\alpha - 1)\sigma^2}{2} \right) \varphi(t, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \\ & + \alpha(\mu_1 - \mu_2)f(1 - f) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, f) + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, f) \end{aligned}$$

On calcule en temps rétrograde

$$\begin{aligned}
 V(t - \Delta t, f) = & \left(1 + \Delta t \left(c(t, f) - \frac{|b(t, f)|}{\Delta f} - \frac{2a(t, f)}{\Delta f^2} \right) \right) V(t, f) \\
 & + \Delta t \left(\frac{b^+(t, f)}{\Delta f} + \frac{a(t, f)}{\Delta f^2} \right) V(t, f + \Delta f) \\
 & + \Delta t \left(\frac{b^-(t, f)}{\Delta f} + \frac{a(t, f)}{\Delta f^2} \right) V(t, f - \Delta f)
 \end{aligned}$$

avec $c(t, f)$ coefficient devant $\varphi(t, f)$

$b(t, f)$ coefficient devant $\frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, f)$

$a(t, f)$ coefficient devant $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, f)$

Initialisation

$$\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$$

Itération

- Avec le schéma de l'EDP de HJB, calculer $\bar{V}^0(t, \cdot)$ et $\bar{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\bar{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \bar{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \bar{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \bar{V}^1(t, f)$
 - si $\bar{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \bar{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \bar{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \bar{V}^0(t, f)$

Initialisation

$$\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$$

Itération

- Avec le schéma de l'EDP de HJB, calculer $\overline{V}^0(t, \cdot)$ et $\overline{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\overline{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \overline{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$
 - si $\overline{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \overline{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$

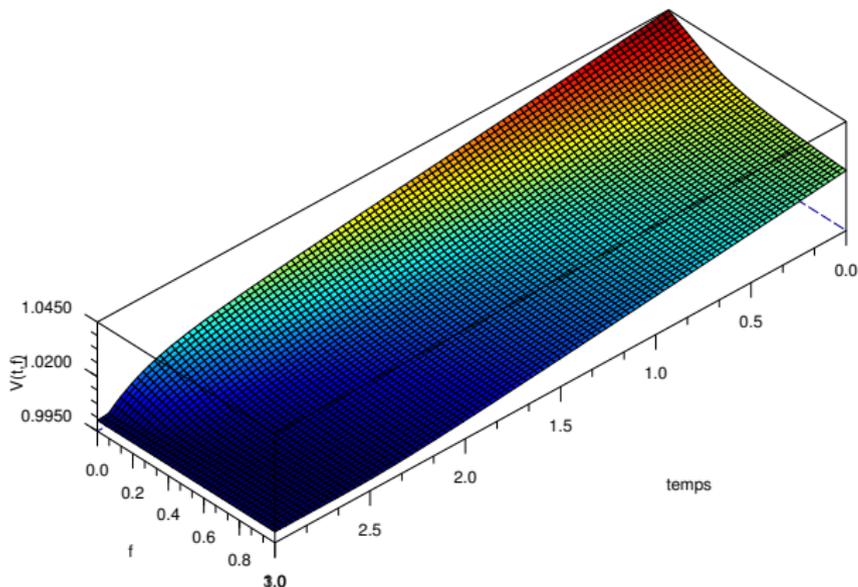
Initialisation

$$\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$$

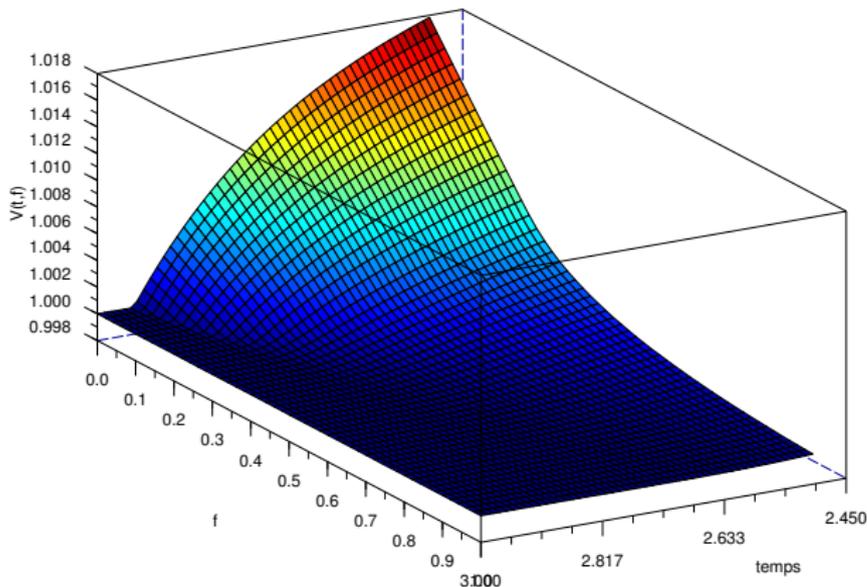
Itération

- Avec le schéma de l'EDP de HJB, calculer $\overline{V}^0(t, \cdot)$ et $\overline{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\overline{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \overline{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$
 - si $\overline{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \overline{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$

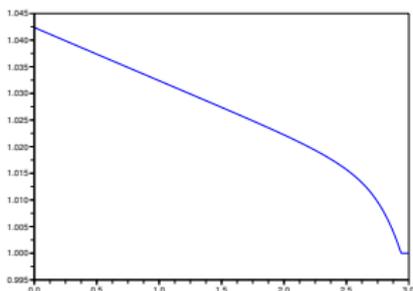
Paramètres : $T = 3$, $\mu_2 = -0.2$, $\mu_1 = 0.21$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,
 $\sigma = 0.15$, $g_{01} = g_{10} = 0.01$



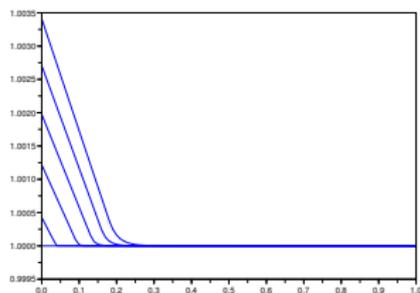
Coûts de transaction $g_{01} = g_{10} = 0.01$
Zoom entre $t = 2.5$ et $t = 3 = T$



Coupe en $f = 0.05$



Coupes en $t = 2.90, t = 2.91, t = 2.92, t = 2.93, t = 2.94, t = 2.95,$



Allocation
optimale de
portefeuille
38/46

Benoîte de
Saporta

Motivation

Introduction

Cadre

Fonction
Valeur

Résultats théoriques

Discrétisation

Résultats
numériques

Compraison
des stratégies

Une stratégie
efficace

Comparaisons

- 1 Motivation
- 2 Introduction au contrôle stochastique
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Résultats théoriques
 - Discrétisation
 - Résultats numériques
- 5 **Compraison des stratégies**
 - **Une stratégie efficace**
 - **Comparaisons**

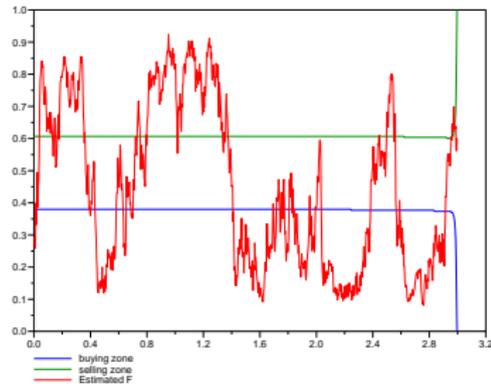
- Calculer \hat{V}^0, \hat{V}^1
- Estimer \hat{F}_t
- Comparer $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$ et $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$:

- achat si

$$\hat{V}^0(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{01})^\alpha \hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$$

- vente si

$$\hat{V}^1(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{10})^\alpha \hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$$



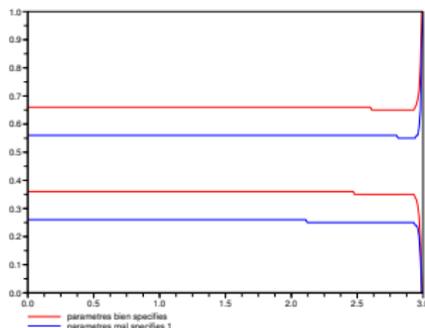
$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, T = 3$$

- Calcul de la fonction valeur :
 - pas de discrétisation en temps 10^{-6}
 - pas de discrétisation en espace 10^{-3}
- 10^5 simulations de Monte Carlo de la stratégie efficace

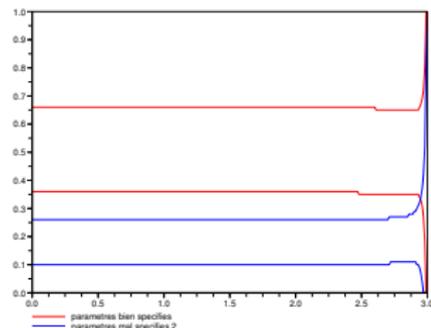
F_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
\hat{V}^0	1.061	1.057	1.053	1.049	1.045	1.043
Stratégie	1.061	1.056	1.052	1.049	1.045	1.043

F_0	0.6	0.7	0.8	0.9	1
\hat{V}^0	1.041	1.039	1.038	1.037	1.036
Stratégie	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$

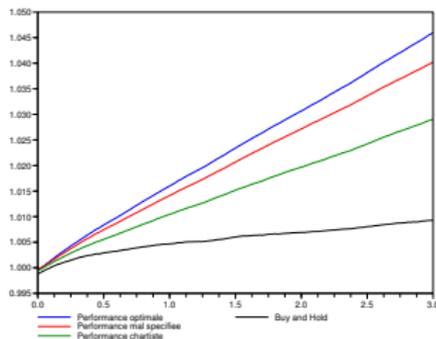


Paramètres mal calibrés 1 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

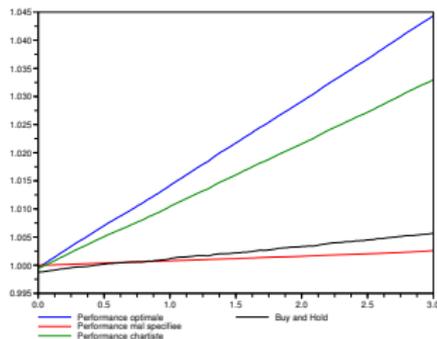


Paramètres mal calibrés 2 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $\sigma = 0.25$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$
100.000 simulations Monte Carlo

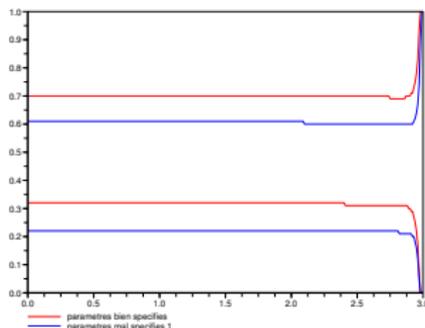


Paramètres mal calibrés 1 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$



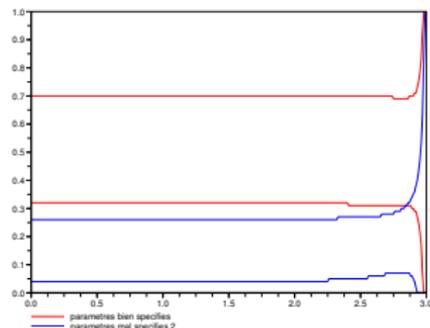
Paramètres mal calibrés 2 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $\sigma = 0.25$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$



Paramètres mal calibrés 1 :

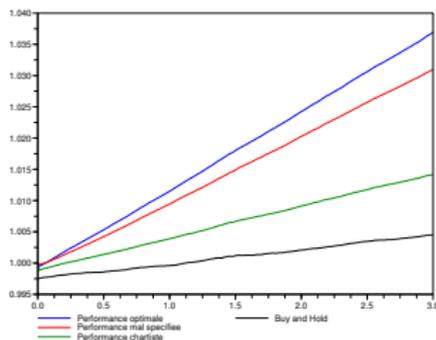
$$\mu_1 = -0.3, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$



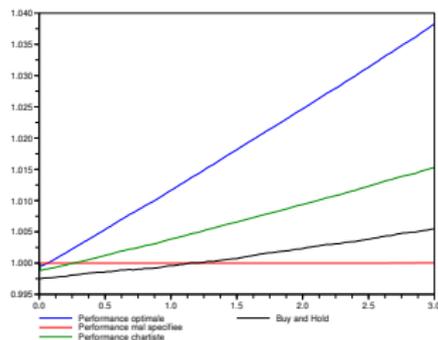
Paramètres mal calibrés 2 :

$$\mu_1 = -0.3, \mu_2 = 0.1, \sigma = 0.25, \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$
100.000 simulations Monte Carlo

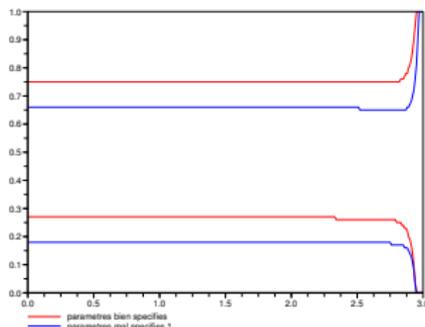


Paramètres mal calibrés 1 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$



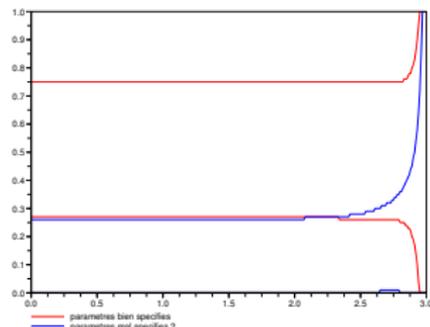
Paramètres mal calibrés 2 :
 $\mu_1 = -0.3$, $\mu_2 = 0.1$, $\sigma = 0.25$,
 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$



Paramètres mal calibrés 1 :

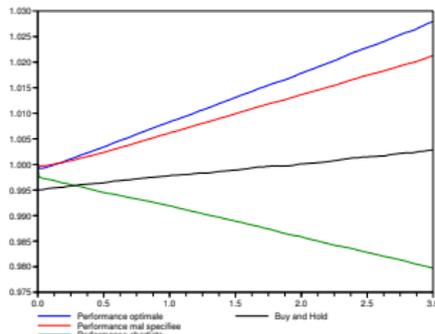
$$\mu_1 = -0.3, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$



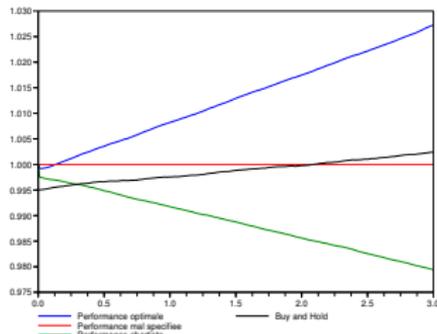
Paramètres mal calibrés 2 :

$$\mu_1 = -0.3, \mu_2 = 0.1, \sigma = 0.25, \\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.21$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$
100000 simulations Monte Carlo



Paramètres mal calibrés :
 $\mu_1 = -0.18$, $\mu_2 = 0.18$,
 $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$



Paramètres mal calibrés :
 $\mu_1 = -0.18$, $\mu_2 = 0.18$,
 $\sigma = 0.25$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$