

Entropie à l'infini en théorie ergodique

Colloquium MIPS

Montpellier, mai 2025

Barbara Schapira, IMAG

Systèmes dynamiques

Un **ensemble** X (espace des phases) : Cercle, carré, tore, *variété*, ...

Une **dynamique**, l'évolution du système au fil du temps :

* dynamique **discrète**, donnée par une fonction $\varphi : X \rightarrow X$,

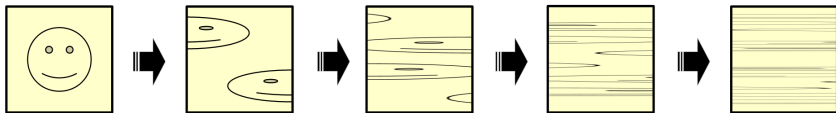
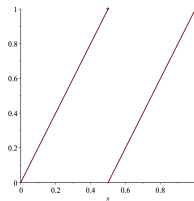
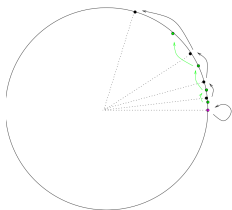


Figure – Doublement de l'angle et transformation du boulanger

Systèmes dynamiques (II)

Un **ensemble** X (espace des phases) : Cercle, carré, tore, *variété*, ...

Une **dynamique**, l'évolution du système au fil du temps :

* dynamique **continue**, donnée par un flot (φ_t) , $\varphi_t : X \rightarrow X$

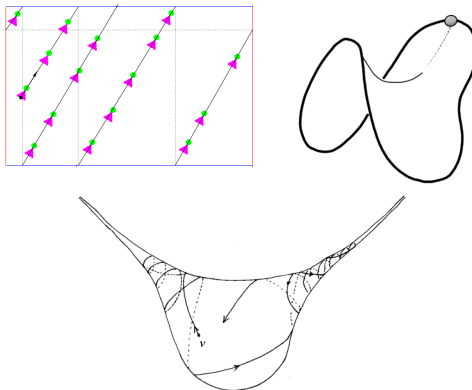


Figure – Quelques flots

Systèmes dynamiques (III)

Trajectoires

$\{x, \varphi(x), \varphi(\varphi(x)), \dots, \varphi^n(x) \dots, n \in \mathbb{N}\}$ ou $\{\varphi_t(x), t \in \mathbb{R}\}$

Questions :

- Trajectoires périodiques ?
- Trajectoires denses ? Equiréparties ?
- Sensibilité aux conditions initiales ?
- Trajectoires récurrentes ?

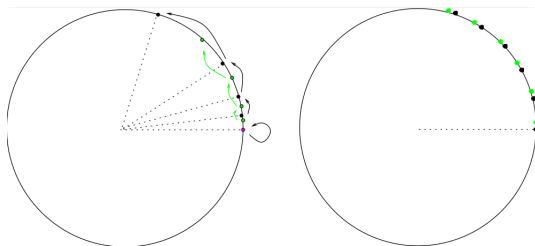


Figure – Rotation versus Doublement de l'angle sur le cercle

Théorie ergodique

Etude statistique des trajectoires

On se donne une **probabilité invariante** μ sur X :

→ μ mesure la taille des ensembles $A \subset X$ $0 \leq \mu(A) \leq \mu(X) = 1$.

→ μ permet de calculer des moyennes d'observables $\int_X f(x) d\mu(x)$

→ μ est invariante par la dynamique

$$\int_X f \circ \varphi_t(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

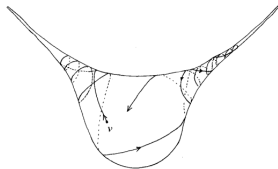
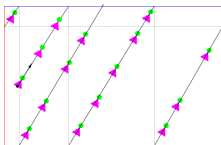
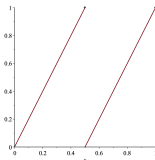


Figure – La longueur, l'aire, le volume sont invariants

Exemples : Longueur sur l'intervalle, aire sur le carré, volume ...

Théorie ergodique (II)

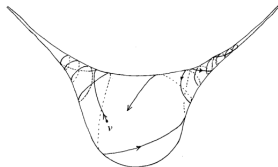
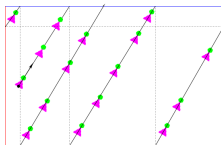
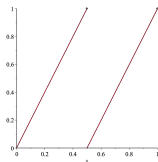


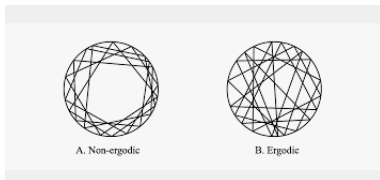
Figure – La longueur, l'aire, le volume sont invariants

Questions :

- Taille de l'ensemble des Trajectoires périodiques ?
- Taille de l'ensemble des Trajectoires denses ? Equiréparties ?
- Taille de l'ensemble des trajectoires récurrentes ?
- ...

Théorie ergodique (III)

L'hypothèse ergodique de Boltzmann : La valeur moyenne d'une observable sur un grand intervalle de temps $\rightarrow$ valeur moyenne de l'observable sur tout l'espace.

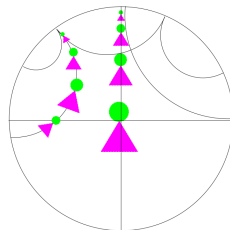
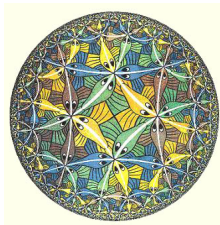


Théorème ergodique de Birkhoff (193 ?) : Si μ est **ergodique**, alors pour toute observable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et pour μ -presque tout x ,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(x)) dx \rightarrow \int_X f(y) d\mu(y) \quad \text{quand} \quad T \rightarrow +\infty.$$

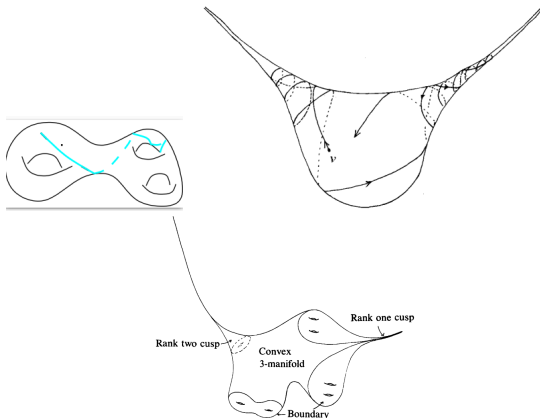
Courbure négative et chaos

Jouons aux billes. Lançons 2 billes proches dans la même direction. Sur une surface **plate** ou **courbe**, le comportement ne sera pas le même.



Courbure négative et chaos (II)

On peut construire des **surfaces hyperboliques**, qui ressemblent mathématiquement en tout point à une selle de cheval.



Suivant les exemples, on peut **partir loin à l'infini** ou pas.

Entropie d'un système dynamique $\varphi : X \rightarrow X$

Combien peut-on voir de trajectoires ?

On se donne une **précision** $\epsilon > 0$ et un **temps** $T > 0$.

Combien de trajectoires distinctes voit-on, à une erreur ϵ près, jusqu'au temps T ?

Soit $N(\epsilon, T)$ ce nombre. Il croît avec T . L'entropie est son taux de croissance exponentielle :

$$h(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N(\epsilon, T).$$

Exemples Entropie d'une rotation : 0

Entropie du doublement de l'angle : $\log 2$

Entropie de la transformation du boulanger : $\log 2$

Entropie du flot géodésique : grandeur géométrique importante

Entropie d'une mesure

Soit μ une mesure invariante pour $\varphi : X \rightarrow X$.

Combien μ peut-elle voir de trajectoires ?

On se donne une précision $\epsilon > 0$.

Combien de trajectoires distinctes voit-on, à une erreur ϵ près, jusqu'au temps T , dans un ensemble de μ -mesure positive ?

Soit $N(\epsilon, T, \mu)$ ce nombre. Il croît avec T . L'entropie de μ est son taux de croissance exponentielle :

$$h(\mu, \varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N(\epsilon, T).$$

Principe variationnel

$$h(\varphi) = \sup \{ h(\mu, \varphi), \mu \text{ mesure de probabilité invariante} \}.$$

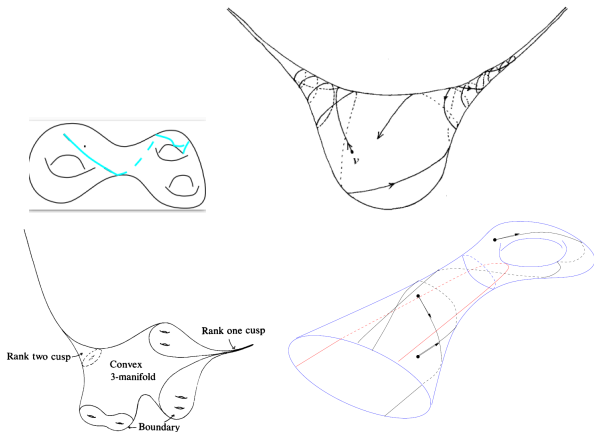
Mesure d'entropie maximale : mesure qui vérifie $h(\mu, \varphi) = h(\varphi)$.

Ses trajectoires sont les plus chaotiques possibles.

Et l'infini dans tout ça ?

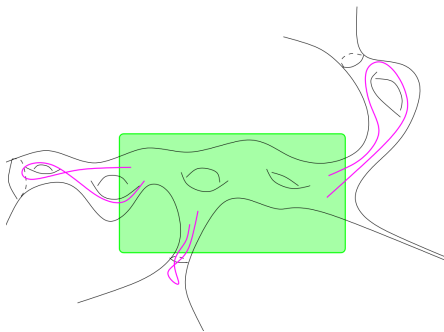
Lorsque la surface est **compacte**, i.e. on ne peut pas partir à l'infini, il existe toujours une **unique mesure d'entropie maximale**. Celle qui reflète le mieux le chaos.

Sinon ... **c'est compliqué !**



Entropie à l'infini

Entropie à l'infini : On se donne une précision $\epsilon > 0$, une grande boîte B et un temps $T > 0$.

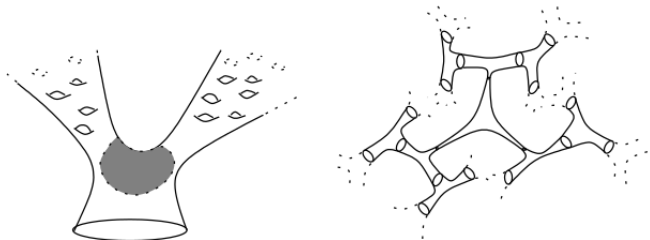


Nb de trajectoires distinctes jusqu'au temps T , hors de B , à ϵ près ? L'entropie à l'infini est son taux de croissance exponentielle :

$$h_{\infty}(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log N(\epsilon, B, T).$$

Quand l'infini est tout petit ...

Strong positive recurrence : On suppose que $h_\infty(\varphi) < h(\varphi)$.



Résultats (avec V. Pit, S. Tapie, S. Gouezel, A. Florio, A. Vaugon)

- Existence et unicité d'une mesure d'entropie maximale
- Régularité de l'entropie lorsque la géométrie de la surface varie
- Comparaison de l'entropie de la surface et de ses revêtements
- Existence de résonances. Première étape vers le mélange rapide du flot géodésique

Possibilité de contrôler d'autres « infinis », des zones pas sympa (J. Buzzi, S. Crovisier, O. Sarig).