Groupes Kleiniens, Rigidité, Comptage, entropie

Barbara Schapira, Gilles Courtois

Octobre 2014

Abstract

Notes de cours de master, octobre 2014, université Cheikh anta Diop, Dakar [1]

Chaque section correspond à une séance de 2h, si possible.

1 Géométrie hyperbolique

1.1 Les trois modèles conformes de l'espace hyperbolique

Nous disposons de plusieurs modèles pour décrire l'espace hyperbolique de dimension n. Chacun a son utilité.

Nous nous concentrerons particulièrement dans ce qui suit sur les cas $n = 2$ et $n = 3$, qui permettent de présenter les idées essentielles.

1.1.1 Le modèle du demi-espace

Le modèle du demi-espace supérieur est défini comme suit. Le demi-espace $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$ est muni de la métrique riemannienne $ds^2 = \dfrac{dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2}{y^2}$. Ceci signifie que sur l'espace tangent $T_X\mathbb{H}^n$, on dispose du produit scalaire $\frac{dx_1^2+\ldots+dx_{n-1}^2}{y^2}$, où y est la dernière coordonnée du point X.

En particulier, observons que les angles euclidiens ou hyperboliques sont les mêmes, puisque sur chaque espace tangent, le produit scalaire hyperbolique est proportionnel au produit scalaire euclidien.

Cette métrique permet de mesurer la norme d'un vecteur v tangent à $\mathbb{H}^n$ au point $X = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ par $\|v\|_{hyp} = \frac{\|v\|_{eucl}}{y}$. Cela permet ensuite de calculer les longueurs des courbes. Si $c : [a, b] \to \mathbb{H}^n$ est une courbe de classe C^1, alors

$$L_{hyp}(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{hyp}\, dt\,.$$

Ceci définit une distance sur $\mathbb{H}^n$, par

$$d_{hyp}(X, Y) = \inf L_{hyp}(c)\,,$$

l'inf étant pris sur toutes les courbes C^1 joignant X à Y. Nous noterons désormais d la distance hyperbolique.

L'élement de volume hyperbolique est $d\mathrm{vol}$—$(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = \frac{1}{y^n} dx_1 \ldots dx_{n-1} dy$

Une géodésique de $\mathbb{H}^n$ est une courbe minimisant la distance entre deux quelconques de ses points. **DESSIN**

[1]

Les géodésiques de $\mathbb{H}^n$ sont les demi-droites verticales et les arcs de cercles orthogonaux au bord. Pour le voir, on vérifie que les demi-droites verticales sont des géodésiques, puis on fait agir le groupe des isométries et on trouve toutes les géodésiques.

Une isométrie de $\mathbb{H}^n$ est une application C^1 de $\mathbb{H}^n$ préservant la métrique. En d'autres termes, si on note g_X le produit scalaire hyperbolique en $T_X\mathbb{H}^n$, alors $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ est une isométrie si pour tous $X \in \mathbb{H}^n$ et $v, w \in T_X\mathbb{H}^n$, on a $g_\varphi(X)(d\varphi_X(v), d\varphi_X(w)) = g_X(v,w)$. En particulier, d'après la remarque ci-dessus, une isométrie de $\mathbb{H}^n$ est en particulier une application de $\mathbb{H}^n$ dans lui-même qui préserve les angles euclidiens, i.e. une application *conforme*.

Dans le cas $n = 2$, des calculs élémentaires explicites donnent:

Théorème 1.1 *Considérons $\mathbb{H}^2$ comme $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$. Le groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^2$ s'identifie au groupe $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm Id$, ou encore au groupe $\mathcal{H}$ des homographies à coefficients réels, c'est-à-dire les applications du type*

$$z \in \mathbb{H}^2 \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où $ad - bc = 1$.

C'est encore le groupe des transformations conformes de $\mathbb{H}^2$.

Il agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{H}^2$: étant donnés deux vectors $v \in T_X\mathbb{H}^2$ et $w \in T_Y\mathbb{H}^2$, avec $\|v\|_{hyp} = \|w\|_{hyp} = 1$, il existe une unique isométrie envoyant v sur w.

Ainsi, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe à z le point $\frac{az+b}{cz+d}$.

Dans le cas $n = 3$, le bord de $\mathbb{H}^3$ est $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$. Sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, rappelons qu'une inversion par rapport à un cercle de rayon r est une application conforme qui envoie le centre du cercle à l'infini et inverse l'intérieur et l'extérieur du cercle. **DEFINITION par le dessin**. Le groupe engendré par les inversions par rapport aux cercles et les réflexions par rapport aux droites de $\mathbb{C}$ est appelé *groupe de Möbius*. Chaque inversion de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par rapport à un cercle $C(o,r)$ peut s'étendre en une transformation de $\mathbb{H}^3$, inversion par rapport à la demi sphère $S(o,r)$ dont le bord est $C(o,r)$. Cette transformation est une isométrie de $\mathbb{H}^3$. De plus, les isométries directes de $\mathbb{H}^3$ sont les transformations du type ci-dessus qui s'écrivent comme un produit d'un nombre pair d'inversions. Sur $\mathbb{C}$ le groupe engendré par les produits d'un nombre pair d'inversions est exactement le groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ des homographies à coefficients complexes. Ainsi, ceci permet d'identifier le groupe des isométries directes de $\mathbb{H}^3$ au groupe $PSL(2,\mathbb{C})$.

Théorème 1.2 *Le groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^3$ est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{C})$ via l'application d'extension ci-dessus.*

En corollaire de cette identification, on remarque que le groupe des isométries directes de $\mathbb{H}^3$ est le groupe des transformations conformes du bord de $\mathbb{H}^3$.

Le modèle du demi-espace est très adapté pour les calculs, mais le rôle apparemment particulier de l'infini est gênant.

1.1.2 Le modèle de la boule

La boule hyperbolique $\mathbb{B}^n$ est définie comme la boule unité ouverte $\mathbb{B}^n = B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique $\frac{4dx^2}{(1-|x|^2)^2}$. L'élément de volume est alors $\frac{2^n dx_1 \ldots dx_n}{(1-|x|^2)^n}$.

Proposition 1.3 *L'application de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{B}^2$ définie par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ est une isométrie.*

On envoie ensuite $\mathbb{H}^n$ dans $\mathbb{B}^n$ de manière isométrique en identifiant les sphères unité $T^1_o\mathbb{H}^n$ et $T^1_0\mathbb{B}^n$, puis en envoyant le point $(0,\ldots,0,1)$ sur le centre de la boule, et chaque 2-plan de $\mathbb{H}^n$ sur un deux-plan de $\mathbb{B}^n$ comme ci-dessus.

Les géodésiques de $\mathbb{B}^n$ sont les diamètres et les arcs de cercle orthogonaux au bord.

1.1.3 le modèle de l'hyperboloide

Dans $\mathbb{R}^{n+1}$, on définit $\mathcal{H}^n$ comme la nappe supérieure

$$\mathcal{H}^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}), x_{n+1} > 0, x_1^2 + \ldots x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\},$$

la métrique étant donnée par la restriction à chaque espace tangent à $\mathcal{H}^n$ de la forme quadratique $x_1^2 + \ldots x_n^2 - x_{n+1}^2$, qui se trouve être définie positive sur ces sous-espaces là.

La projection stéréographique vue depuis le point $(0,\ldots,0,-1)$ envoie $\mathcal{H}^\setminus$ dans $\mathbb{B}^n$ isométriquement.

Si on veut une formule explicite (voir Ratcliffe) l'application ci-dessous est une isométrie de $\mathcal{H}^n$ dans $\mathbb{B}^n$

$$(x_1 \ldots x_n) \mapsto \left(\frac{y_1}{1+y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{1+y_{n+1}}\right).$$

Ce modèle est particulièrement adapté pour décrire les isométries en dimension n quelconque; elles s'identifient au sous-groupe du groupe orthogonal de la forme quadratique $x_1^2 + \ldots x_n^2 - x_{n+1}^2$ qui préserve la nappe supérieure. Ainsi, le groupe des isométries de $\mathcal{H}^n$ s'identifie à la composante connexe de l'identité $O_o(n,1)$ dans $O(n,1)$. De même le groupe des isométries directes de $\mathcal{H}^n$ s'identifie à $SO_o(n,1)$.

Dans ce modèle les géodésiques sont les intersections de $\mathcal{H}^n$ avec les plans de dimension 2 passant par l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.2 Isométries

Les isométries de $\mathbb{H}^n$ se prolongent en des applications continues de $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ dans lui-même. Elles ont donc au moins un point fixe.

Isométrie hyperbolique : transformation conforme sur le bord et sur $\mathbb{H}^n$ évidemment!!

Une isométrie est dite elliptique si elle a au moins un point fixe dans $\mathbb{H}^n$. Elle est parabolique si elle ne fixe aucun point dans $\mathbb{H}^n$ et fixe un unique point dans $\partial\mathbb{H}^n$, et loxodromique si elle fixe deux points du bord. **Pourquoi pas plus de deux points fixes en dim $n \geq 4$?**

Dans $\mathbb{H}^2$, le groupe des isométries directes s'identifie à $PSL(2,\mathbb{R})$. Une isométrie elliptique γ est conjuguée à $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, pour un $\theta \in [0,2\pi]$, et sa trace vérifie $|tr(\gamma)| < 2$. Une isométrie parabolique est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour un $t \in \mathbb{R}$ et a une trace égale à 2. Une isométrie loxodromique est conjuguée à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $|\lambda| \neq 1$, et a donc une trace $|tr(\gamma)| > 2$.

dessin

Dans $\mathbb{H}^3$ l'identification à $PSL(2,\mathbb{C})$ donne le même rśultat. Les isométries elliptiques sont celles de trace $|tr(\gamma)| < 2$, les paraboliques de trace $|tr(\gamma)| = 2$, et les loxodromiques de trace $|tr(\gamma) > 2$.

Une isométrie loxodromique γ admet deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$, γ^+ et γ^-, l'un attractif, l'autre répulsif. Elle agit par translation le long de la géodésique $(\gamma^-\gamma^+)$. On peut trouver deux disques ouverts disjoints D^- et D^+ de $\partial\mathbb{H}^n$, centrés en γ^- et γ^+ respectivement, tels que $\gamma(D^-) = \partial\mathbb{H}^n \setminus \overline{D^+}$, et $\gamma^{-1}(D^+) = \partial\mathbb{H}^n \setminus \overline{D^-}$.

1.3 Bord à l'infini

On peut compactifier l'espace hyperbolique par son bord. Dans le modèle du demi-espace, $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$, dans celui de la boule, $\partial\mathbb{B}^n = S^{n-1}$.

Ce bord à l'infini s'identifie aussi à l'ensemble des extrémités de rayons géodésiques. Ainsi, la distance d'un point de $\mathbb{H}^n$ à un point du bord $\partial\mathbb{H}^n$ est toujours infinie.

Dessin

Une *ombre* $\mathcal{O}_x(B(y,r))$ est définie comme l'ombre sur le bord de la boule $B(y,r)$, vue de x, i.e. l'ensemble des $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ tels que la géodésique $[x,\xi)$ intersecte la boule $B(y,r)$.

dessin

Les ombres définissent la topologie du bord $\partial\mathbb{H}^n$ et sont très commodes pour décrire le comportement asymptotique de points ou de géodésiques partant à l'infini dans $\mathbb{H}^n$.

Si on veut comprendre la convergence de suites de points de $\mathbb{H}^n$ vers un point de $\partial\mathbb{H}^n$, il est commode de considérer l'ombre vue de x de la boule $B(y,r)$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$. C'est l'nsemble des $z \in \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ tels que $[x,z)$ intersecte $B(y,r)$. **dessin**.

Alors, une suite (x_n) de $\mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ converge vers ξ si pour toute ombre $\mathcal{O}$ contenant ξ, il existe un rang à partir duquel la suite x_n est dans l'ombre.

Etant donné un point $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$, et deux points x, y de $\mathbb{H}^n$, il est commode de comprendre la "distance relative" de x et y à ξ, i.e. la quantité "$d(x,\xi) - d(y,\xi)$". Cette quantité n'a pas de sens car les deux termes sont infinis. On considère alors un rayon géodésique paramétré à vitesse 1, $(c(t))_{t\geq 0}$, terminant en ξ, et la limite suivante

$$\lim_{t\to+\infty} d(x,c(t)) - d(y,c(t))\,.$$

Cette limite existe, et on peut vérifier qu'elle ne dépend pas du rayon géodésique choisi. On note

$$\beta_\xi(x,y) = \lim_{t\to+\infty} d(x,c(t)) - d(y,c(t))\,.$$

Et on y pense, par abus de notation, comme la distance relative de x et y à ξ.

On appelle *horosphère centrée en* ξ une ligne de niveau de la fonction $x \mapsto \beta_\xi(x,y)$.

dessin

Proposition 1.4 *L'application β est de classe C^2 en les variables x ou y, et continue en ξ.*

En courbure constante on doit avoir mieux, non ?? Heintze Im Hof

1.4 Groupes Kleiniens

1.4.1 Définition, groupe de Schottky

Un groupe Kleinien est un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{H}^n$. En d'autres termes, c'est un groupe Γ d'isométries telles qu'une orbite $\Gamma.x$ n'a pas de point d'accumulation dans les compacts.

Quand $n = 2$, on parle plutôt de groupe *fuchsien*.

En général, on considère plutôt des groupes d'isométries directes, i.e. des sous-groupes de $SO_o(n, 1)$ (ou $PSL(2, \mathbb{C})$ lorsque $n = 3$ et $PSL(2, \mathbb{R})$ dans le cas $n = 2$).

Le quotient de $\mathbb{H}^n$ par un groupe Kleinien Γ, noté $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, est un espace topologique bien défini dès que Γ est discret. Lorsque de plus Γ ne comporte aucun élément elliptique, M est une variété.

De nombreux exemples issus de constructions arithmétiques produisent des groupes Γ contenant des éléments elliptiques, donc les espaces quotients ne sont pas des variétés, car il y a des "pointes" correspondant aux points fixes des éléments elliptiques. Toutefois, cette difficulté est purement technique et très facile à contourner, nous parlerons donc de variété quotient quoi qu'il arrive.

Définition 1.5 *On dit que* Γ *est cocompact lorsque* $\mathbb{H}^n/\Gamma$ *est compact, et que c'est un réseau (cocompact ou non) si* $\mathbb{H}^n/\Gamma$ *a un volume fini.*

Vous verrez les constructions les plus classiques de groupes Kleiniens avec Gilles tout à l'heure.

Mentionnons tout de suite le cas des *groupes de Schottky*, qui sont les plus simples à définir.

Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ des isométries loxodromiques qui admettent des disques $D_1^{\pm}, \ldots, D_d^{\pm}$ tous disjoints. Alors, par un célèbre argument, dit de *Ping Pong*, le groupe Γ engendré par les γ_i est discret. En effet, il est facile de voir que l'orbite d'un point qui n'est dans aucun $D_i^{\pm}$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{H}^n$. Ce même argument de Ping Pong montre même que le groupe Γ est un groupe libre à d générateurs.

dessin

Lorsqu'on considère deux générateurs dans $\mathbb{H}^2$, la surface quotient est facile à comprendre. C'est soit un *pantalon*, soit un *tore percé*.

dessins

1.4.2 Ensembles limites

Soit Γ un groupe discret, et $x \in \mathbb{H}^n$. Le groupe étant discret, l'orbite Γx ne peut pas avoir de point d'accumulation dans $\mathbb{H}^n$.

On définit l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ comme l'ensemble $\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma.x} \setminus \Gamma.x \subset \partial\mathbb{H}^n$ des points d'accumulation de Γ.

Proposition 1.6 *L'ensemble limite ne dépend pas de* x.

Les points fixes de tous ses éléments paraboliques ou hyperboliques forment un sous-ensemble dénombrable dense dans $\Lambda(\Gamma)$.

L'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ *a un cardinal inférieur à* 2 *ou infini. Lorsqu'il est infini, c'est le plus petit fermé* Γ*-invariant non vide de* $\partial\mathbb{H}^n$.

Lorsque l'ensemble limite est infini, on dit que Γ est *non élémentaire*.

Démonstration : Par définition, $\Lambda(\Gamma)$ est un fermé Γ-invariant non vide. Il ne dépend pas de x, car Γ agit par isométries sur $\mathbb{H}^n$, donc les orbites $\Gamma.x$ et $\Gamma.y$ restent à distance bornée l'une de l'autre, donc ont les mêmes points d'accumulation sur le bord.

Nous admettons qu'il est minimal lorsqu'il est infini.

Les points fixes des isométries de Γ sont clairement dedans. Leur adhérence est un fermé invariant inclus dans $\Lambda(\Gamma)$, c'est donc $\Lambda(\Gamma)$.

Si Γ est un groupe cyclique d'isométries elliptiques, alors $\Lambda(\Gamma)$ est vide.

Si Γ ne contient que des isométries paraboliques avec un point fixe commun, alors $\Lambda(\Gamma)$ est réduit à un point.

Si Γ ne contient que des isométries hyperboliques avec un point fixe commun, alors $\Lambda(\Gamma)$ est réduit à deux points.

Si Γ contenait une isométrie parabolique et une isométrie hyperbolique avec un point fixe commun, il ne serait pas discret.

Si Γ contient au moins deux isométries hyperboliques ou paraboliques dont les points fixes sont distincts, alors $\Lambda(\Gamma)$ est infini. En effet, notons par exemple g et h deux isométries hyperboliques aux points fixes distincts. Alors $h^n g h^{-n}$ est une isométrie hyperbolique dont les points fixes sont $h^n \gamma^{\pm}$. Tous ces points fixes (distincts) sont dans $\Lambda(\Gamma)$ qui est donc infini. **DESSIN** □

Fait 1.7 *Si Γ est cocompact, alors $\Lambda_\Gamma = \partial\mathbb{H}^n$.*

Démonstration : En effet, étant donné $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ et $x \in \mathbb{H}^n$, l'image de la géodésique $[x\xi)$ dans le quotient $\mathbb{H}^n/\Gamma$, reste dans un compact. Dans $\mathbb{H}^n$, elle est donc toujours à distance bornée de l'orbite $\Gamma.x$. Ceci signifie donc que ξ est un point d'accumulation de $\Gamma.x$. □

Fait 1.8 *Si Γ est un groupe de Schottky, alors $\Lambda(\Gamma)$ est un Cantor.*

Rappelons la

Définition 1.9 *Un ensemble de Cantor est un ensemble compact non vide totalement discontinu.*

DESSIN . Peut etre dans $\mathbb{H}^2$ pour que ce soit plus similaire à un cantor classique triadique.

Introduisons tout de suite un sous-ensemble très important de l'ensemble limite, l'*ensemble limite conique* ou *ensemble limite radial* que nous noterons $\Lambda_{rad}(\Gamma)$. Un point ξ est dans l'ensemble limite radial s'il existe un rayon géodésique d'extrémité ξ, et une infinité de points $\gamma_n.o$ à distance bornée de ce rayon géodésique, convergeant vers ξ. **DESSIN**

Proposition 1.10 *Un vecteur $v \in T^1M = T^1(\mathbb{H}^n/\Gamma)$ a un relevé dont l'extrémité v^+ est dans $\Lambda_{rad}(\Gamma)$ si et seulement si sa géodésique $(g^t v)_{t\geq 0}$ revient infiniment souvent dans un compact.*

Démonstration : Exercice. □

2 Énoncés, Comptage

2.1 Croissance de la fonction orbitale

2.1.1 Énoncé

Nous nous intéressons à des résultats du type ci-dessous.

Théorème 2.1 (Margulis) *Soit* Γ *un sous-groupe cocompact de* $\mathbb{H}^n$*, et* $o \in \mathbb{H}^n$ *un point fixé. Alors*

$$\#\{\gamma \in \Gamma,\, \gamma.o \in B(o,R)\} \sim C(\Gamma,x)e^{(n-1)R}\,.$$

Le théorème suivant, dû à Roblin en toute généralité, sera donné avec les bonnes hypothèses, bien moins restrictives, plus loin.

Théorème 2.2 *Soit* Γ *un groupe de Schottky de* $\mathbb{H}^n$*, et* $o \in \mathbb{H}^n$ *un point fixé. Il existe une constante* $0 < \delta_\Gamma < n-1$ *telle que*

$$\#\{\gamma \in \Gamma,\, \gamma.o \in B(o,R)\} \sim C(\Gamma,x)e^{\delta_\Gamma R}\,.$$

2.1.2 Idée de la preuve

L'exposant δ_Γ qui apparait est appelé *exposant critique*. Ce nombre a beaucoup de significations. Il mesure la croissance des orbites du groupe Γ dans $\mathbb{H}^n$, comme l'indique le théorème ci-dessus. Il coincide aussi, dans les exemples les plus classiques, avec la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite. En général, c'est la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble très important de $\Lambda(\Gamma)$, appelé l'ensemble *limite radial*. D'un point de vue dynamique, il coincide avec l'entropie topologique du flot géodésique sur la variété quotient. C'est également l'entropie mesurée d'une mesure invariante par le flot géodésique, la mesure dite de Bowen-Margulis,

Le flot géodésique $(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot défini sur le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^n$ de l'espace hyperbolique, et, par passage au quotient, sur le fibré unitaire tangent T^1M de toute variété hyperbolique $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$. Étant donné un vecteur unitaire $v \in T^1\mathbb{H}$, il existe une unique géodésique $(c_v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ paramétrée à vitesse 1 telle que $c_v'(0) = v$. Le flot au temps t agit ainsi : $g^t(v) = c_v'(t)$. **Dessin**
C'est un système dynamique qui a été et est très étudié depuis plus d'un siècle.

Remarque 2.3 Historiquement, on date souvent la naissance des systèmes dynamiques au moment des travaux de Poincaré, à la fin du dix-neuvième siècle. Hadamard, en 1898, publie - juste après Poincaré - un article intitulé ¡¡ Des surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques ¿¿. De même, la théorie ergodique, étude des systèmes dynamiques chaotiques via leurs mesures invariantes, date des années 30, période pendant laquelle les travaux de Hopf et Hedlund sur le flot géodésique donnent tout de suite des exemples fructueux. On pourrait multiplier les exemples montrant que le flot géodésique en courbure négative est un des exemples les plus fondamentaux des systèmes dynamiques.

De fait, suivant l'approche initiée par Margulis, la preuve consiste à utiliser le flot géodésique et les propriétés ergodiques de la mesure de Bowen-Margulis, en particulier une propriété de *mélange*. Cette propriété signifie que le passé et le futur d'une trajectoire sont essentiellement indépendants. Géométriquement, cette propriété peut être comprise grâce à ce qu'on appelle la *structure produit local*. Cela signifie qu'étant donnés deux vecteurs v et w très proches, on peut ¡¡ recoller ¿¿ le passé de v et le futur de w.

DESSIN

Cela signifie vraiment qu'on ne peut rien déduire sur le futur, connaissant le passé d'une trajectoire. La propriété de *mélange* est une reformulation de cette idée.

Dans la suite du cours, nous allons voir comment construire cette mesure, la mesure de Bowen-Margulis, et étudier ses propriétés, pour prouver le théorème de comptage ci-dessus.

Mais nous allons commencer par un peu de théorie ergodique.

2.2 Théorie ergodique

2.2.1 Coordonnées de Hopf

La structure produit est, comme cela a été mentionné, l'origine du caractère très chaotique du flot géodésique. Ceci peut, très concrètement, se comprendre grâce à l'usage des *coordonnées de Hopf.*

Si $v \in T^1\mathbb{H}$, on notera $v^{\pm}$ les extrémités en $\pm\infty$ de la géodésique qu'il définit. **dessin**.
Si $v \in T^1M$, où $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, on notera parfois $v^{\pm}$ les extrémités d'un relevé quelconque de v, quand on voudra parler de propriétés qui ne dépendent pas du relevé.

Théorème 2.4 *L'application de $T^1\mathbb{H}^n$ dans $\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n \setminus \{Diagonale\} \times \mathbb{R}$ définie par*

$$v \in T^1\mathbb{H}^n \mapsto (v^-, v^+, \beta_{v^+}(o, \pi(v)))\,,$$

est un homéomorphisme.

Démonstration : ADMIS. Exo. □

Dans ces coordonnées, le flot géodésique agit de la manière suivante. Si $v = (v^-, v^+, s)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g^t(v^-, v^+, s) = (v^-, v^+, s + t)\,.$$

Ceci rend ces coordonnées extrêmement confortables.

L'action du groupe est elle aussi bien comprise. Si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\gamma(v^-, v+, s) = (\gamma.v^-, \gamma.v^+, s \pm \beta_{v^+}(o, \gamma^{\pm 1}.o))\,.$$

Exercice : vérifier les signes dans la formule ci-dessus.

On notera désormais $\partial^2\mathbb{H}^n = \partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n \setminus \{\text{Diagonale}\}$. Ainsi, le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^n$ s'identifie à $\partial^2\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Si Γ est un groupe discret, et $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, on a $T^1M = T^1(\mathbb{H}^n/\Gamma) = \left(\partial^2\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}\right)/\Gamma$.

2.2.2 Ensemble non-errant

Lorsque la variété $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ est non compacte, le flot géodésique n'agit pas partout de manière très intéressant.

Définition 2.5 *Un vecteur est dit non-errant si pour tout voisinage V de v, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{V \cap g^t V \neq \emptyset}\, dt = +\infty$. L'ensemble non errant est l'ensemble des vecteurs non errants.*

Théorème 2.6 (Eberlein) *Soit Γ un groupe discret. Dans les coordonnées de Hopf, l'ensemble non errant Ω du flot géodésique sur T^1M est l'ensemble des vecteurs $v \in T^1\mathbb{H}^n$ tels que $v^{\pm} \in \Lambda(\Gamma)$. En d'autres termes, on a*

$$\Omega = (\Lambda(\Gamma) \times \Lambda(\Gamma) \setminus \{Diag\}) \times \mathbb{R})/\Gamma\,.$$

Le groupe Γ est dit convexe-cocompact lorsque Ω est compact. Dans ce cas, pour tout vecteur $v \in \Omega$, $(g^t v)$ reste dans le compact Ω. Autrement dit, pour tout $v \in \Omega$, $v^+ \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$. Ce que nous venons de dire, c'est que

Fait 2.7 Γ *est cocompact ou convexe-cocompact ssi $\Lambda(\Gamma) = \Lambda_{rad}(\Gamma)$ ssi Ω est compact.*

Il est immédiat de vérifier que $\Omega = T^1M$ lorsque M est compacte. C'est encore vrai quand M est de volume fini, ou M est un revêtement galoisien d'une variété compacte. **dessin**.

L'exemple type de groupe Γ tel que Ω ne coincide pas avec T^1M c'est les groupes de Schottky. **Dessin**. Un vecteur qui part droit dans la trompette admet un voisinage de vecteurs qui partent également. Ils sont tous errants.

Mais ces groupes là, les groupes de Schottky, sont convexe-cocompacts. En effet, **DESSIN** si on trace un domaine fondamental et les géodésiques joignant les bords des disques $\partial D_i^{\pm}$ qui sont adjacents, on constate immédiatement que l'ensemble des vecteurs non errants est inclus dans un sous ensemble compact de ce domaine fondamental. ([2])

2.2.3 Mesures invariantes

Lorsque nous parlerons de mesure, nous sous-entendrons toujours *mesure de Radon sur la tribu borélienne*, i.e. mesure borélienne finie sur les compacts. Une mesure invariante par le flot géodésique est une mesure μ sur T^1M telle que pour tout borélien $A \subset T^1M$, on a $\mu(g^tA) = \mu(A)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Elle est dite *ergodique* si tout ensemble A presque surement invariant (i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\mu(A\Delta g^tA) = 0$) est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle. L'exemple type de mesure non ergodique est la somme de deux mesures invariantes distinctes.

Dans ce qui suit nous ne supposerons pas que μ est finie.

Le flot géodésique est un flot très chaotique. Un des indices du chaos est l'abondance de mesures invariantes. Lorsque Γ est non élémentaire, il a une infinité de géodésiques périodiques distinctes.

Rappelons que l'axe d'une isométrie hyperbolique de Γ passe au quotient en une géodésique périodique. Deux isométries conjuguées dans Γ, h et ghg^{-1} ont des axes A et $g(A)$ images l'un de l'autre par l'élément $g \in \Gamma$ de sorte qu'ils donnent lieu à la même géodésique périodique. Ainsi, les géodésiques fermées sont en bijection avec les classes de conjugaison d'éléments hyperboliques de Γ.

Par exemple, si Γ est un Schottky, **dessin trompette et n- tours autour**, Ces géodésiques périodiques sur M se relèvent sur le fibré unitaire tangent T^1M en des orbites périodiques du flot géodésique. A multiplicité près, une géodésique fermée de M donne lieu à deux orbites périodiques, celle de v et celle de $-v$, pour n'importe quel vecteur $v \in T^1M$ tangent à la géodésique fermée.

Soit $p \in T^1M$ un vecteur périodique pour (g^t), de période notée $l(p)$. Alors la mesure notée par abus δ_p consistant à intégrer une fonction f sur l'orbite, comme cela $\int f d\delta_p = \frac{1}{l(p)} \int_0^{l(p)} f\, d\delta_p$ est une mesure de probabilité invariante dont le support est exactement l'orbite de p. On appellera *mesure périodique* une telle mesure. Ces mesures sont des mesures de probabilité invariantes. Elles sont ergodiques, et elles sont denses dans l'ensemble des mesures de probabilité invariantes. Malheureusement, elles ne sont pas très adaptées à l'étude du flot géodésique, car vu via une de ces mesures, le flot géodésique se résume à une rotation le long d'une orbite périodique. En particulier, elles ne sont pas mélangeantes.

La mesure de Liouville est la mesure riemannienne sur T^1M. Elle est définie par

$$d\mathcal{L}(v) = d\mathrm{vol}(x) d\lambda_x(v)\,,$$

où vol est la mesure hyperbolique définie au premier cours, et $d\lambda_x(v)$ est la mesure de Lebesgue sur la sphère $T_x^1\mathbb{H}^n$. C'est donc une mesure de Radon (mesure borélienne

[2] Cette preuve ne marche qu'en dimension 2 mais le résultat est toujours vrai.

finie sur les compacts). Le théorème de Liouville assure que cette mesure est invariante par le flot géodésique de $T^1\mathbb{H}^n$. Cette mesure est invariante par tout le groupe Γ d'isométries. Elle déf

Théorème 2.8 *Soit $o \in \mathbb{H}^n$ un point fixé. Dans les coordonnées de Hopf, la mesure de Liouville s'écrit*

$$d\mathcal{L}(v) = e^{\beta_{v^-}(o,\pi(v))+\beta_{v^+}(o,\pi(v))} d\lambda_o(v^-)d\lambda_o(v^+)dt\,,$$

où $\pi(v)$ désigne le point base de v, et λ_o la mesure de Lebesgue (angulaire) sur la sphère $T^1_o\mathbb{H}^n$. En particulier, cette écriture est indépendante du choix de o.

Cette mesure étant invariante par toutes les isométries de $\mathbb{H}^n$, elle définit donc une mesure invariante sur T^1M pour toute variété hyperbolique M. En particulier, elle ne dépend que de la géométrie de $\mathbb{H}^n$, et pas du groupe Γ considéré.

Démonstration : Nous admettrons la preuve de ce théorème. Observons qu'il a été démontré par E. Hopf dans les années 1930, dans le cas $n = 2$. C'est un résultat crucial pour démontrer l'ergodicité de la mesure de Liouville, sur une surface de volume fini (résultat dû à Hopf, précisément).

En dimension $n \geq 3$, il a fallu attendre les travaux d'Anosov et Sinai, dans les années 1950 (ou 1960 ? **VERIFIER date**) pour avoir le même résultat. □

Remarque 2.9 COmme mentionné plus haut, le point o du théorème est arbitraire. On peut exprimer la mesure de Liouville $\mathcal{L}$ en fixant un autre point x. En particulier, la famille de mesures $(\lambda_x)_{x\in\mathbb{H}^n}$ sur les sphères unité $T^1_x\mathbb{H}^n$ vérifie les deux propriétés suivantes, pour tous $x, y \in \mathbb{H}^n$ et toute isométrie γ de $\mathbb{H}^n$:

1. invariance par isométrie : $\gamma_*\lambda_x = \lambda_{\gamma x}$
2. conformité $\frac{d\lambda_x}{d\lambda_y}(\xi) = e^{-(n-1)\beta_\xi(x,y)}$

La conjonction des deux propriétés donne $\frac{d\gamma_*\lambda_x}{d\lambda_x}(\xi) = e^{-(n-1)\beta_\xi(\gamma.x,x)}$.

2.2.4 Trouver de bonnes mesures invariantes?

Revenons à notre exemple favori, celui des groupes de Schottky, et par exemple le tore troué. **DESSIN**.
Le volume de cette surface est infini. En particulier, la mesure de Liouville est infinie. Mais elle est en plus non ergodique. En effet, prenons deux vecteurs v_1 et v_2 distincts dont la géodésique part dans la trompette. Alors ils admettent deux voisinages ouverts disjoints, V_1 et V_2, tels que $g^{\mathbb{R}}V_1$ et $g^{\mathbb{R}}V_2$ sont disjoints et de mesure de Liouville positive. Cela contredit l'ergodicité. Mais alors, comment trouver une mesure invariante intéressante pour faire de la théorie ergodique ? Intéressante, c'est-à-dire au minimum ergodique, de support plein, si possible finie, mélangeante ?

En pratique, avant de parler d'ergodicité ou de support, une propriété cruciale en théorie ergodique est la *conservativité de la mesure.* Une mesure μ est dite conservative si pour tout ensemble A tel que $\mu(A) > 0$, pour μ-presque tout $v \in A$, on a $\int_0^\infty \mathbf{1}_A(g^tv)\,dt = +\infty$. Autrement dit, les orbites, presque surement, ne partent pas sans revenir.

Rappelons ici qu'un vecteur v a une géodésique $(g^tv)_{t\geq 0}$ qui revient infiniment souvent dans un compact ssi $v^+ \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$, de sorte qu'une mesure de Radon conservative va être une mesure qui donne mesure pleine aux vecteurs v dont un relevé vérifie $v^+ \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$.

Le *théorème de récurrence de Poincaré* affirme que toute mesure invariante finie est conservative. Mais il peut exister des mesures invariantes infinies et conservatives, qui sont donc int'eressantes du point de vue dynamique.

Dans l'exemple du tore troué, la mesure de Liouville n'est pas conservative.

Dans l'exemple d'une surface de genre infini, $\mathbb{Z}$-revêtement d'une surface hyperbolique compacte **DESSIN**, on peut montrer que la mesure de Liouville est infinie et conservative (et même ergodique).

Lemme 2.10 *Si μ est une mesure de Radon invariante et conservative pour le flot géodésique, son support est inclus dans l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique.*

Démonstration : Exercice. □

Revenons à nos groupes de Schottky, et aux variétés associées, par exemple le tore troué. Comment donc trouver d'autres mesures invariantes intéressantes pour l'étude dynamique du flot géodésique ? L'ensemble non-errant étant compact, il s'agit de trouver des probabilités invariantes supportées sur Ω, si possible ergodique, de support plein, et mélangeants. La construction de Patterson-Sullivan permet de construire une telle mesure, la mesure de *Bowen-Margulis.* En réalité, cette construction est très robuste et permet de construire de nombreuses autres mesures invariantes avec de bonnes propriétés, les *mesures de Gibbs.* Mais nous n'en parlerons pas ici.

La stratégie de la construction de Patterson-Sullivan est la suivante. Se donner une mesure m de Radon invariante par le flot géodésique sur T^1M équivaut à se donner une mesure $\tilde{m}$ de Radon invariante par le flot géodésique et par Γ sur $T^1\mathbb{H}^n$. Les coordonnées de Hopf disent que $T^1\mathbb{H}^n \simeq \partial^2\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, et le flot géodésique agit par translation sur $\mathbb{R}$. De plus, le groupe Γ agit diagonalement sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ et par un cocycle additif sur $\mathbb{R}$. Une mesure $\tilde{m}$ invariante par le flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^n$ s'écrit donc $d\tilde{m} = d\rho \times dt$ où ρ est une mesure sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ invariante par Γ. Plus précisément, on a

Proposition 2.11 *Il y a une bijection entre l'ensemble des mesures de Radon (g^t)-invariantes sur T^1M (resp. les mesures de Radon (g^t)-invariantes ergodiques, resp. les mesures de Radon (g^t)-invariantes de support plein) et l'ensemble des mesures de Radon Γ-invariantes sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ (resp. les mesures de Radon Γ-invariantes ergodiques, resp. les mesures de Radon Γ-invariantes de support plein).*

De plus, cette bijection envoie les mesures de Radon (g^t)-invariantes conservatives *sur les mesures de Radon Γ-invariantes supportées par $(\Lambda(\Gamma))^2$.*

Par conséquent, pour construire de bonnes mesures invariantes par (g^t) sur T^1M, on peut construire de bonnes mesures Γ-invariantes sur $(\Lambda(\Gamma))^2$. Une idée naturelle serait de construire une mesure Γ-invariante sur $\Lambda(\Gamma)$, disons ν, et de considérer la mesure $\tilde{m} = \nu \times \nu \times dt$.

Malheureusement, ce n'est pas possible. En effet,

Lemme 2.12 *Soit Γ un groupe Kleinien non élémentaire. Il n'existe pas de probabilité Γ-invariante sur $\Lambda(\Gamma)$.*

Démonstration : Si Γ est non élémentaire, il contient au moins deux isométries hyperboliques ou paraboliques dont les points fixes sont distincts. Par exemple, soit $h \in \Gamma$ une isométrie hyperbolique. Si ν est une probabilité invariante par tout le groupe Γ, alors $\nu(\partial\mathbb{H}^n \setminus \{h^-, h^+\}) > 0$. Soit donc $A \subset \partial\mathbb{H}^n \setminus \{h^\pm\}$, avec $\nu(A) > 0$. Soit D un domaine fondamental pour l'action de h sur $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{h^\pm\}$. On a $\partial\mathbb{H}^n \setminus \{h^\pm\} = \sqcup_{n\in\mathbb{Z}} h^n(D)$. Donc $\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu(A \cap h^n D)$. Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tq $\nu(A \cap h^n D) > 0$. Mais alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \nu(A \cap h^n D) = +\infty$, ce qui contredit le fait que ν soit une probabilité. □

Reprenons l'exemple le plus naturel de mesure sur le bord. La propriété d'invariance et de conformité de la famille de mesures de Lebesgue sur les sphères donne des exemples de mesures sur le bord, qui sont non pas invariantes mais quasi-invariantes par Γ, au sens où

$$\frac{d\gamma_*\lambda_x}{d\lambda_x}(\xi) = e^{-(n-1)\beta_\xi(\gamma.x,x)}\,.$$

Nous admettrons cette formule. Cette formule signifie que l'action de γ grossit la mesure autour de ξ lorsque ξ est plus proche de $\gamma.x$ que de x (on le voit mieux!) et inversement, la mesure $\gamma_*\lambda_x$ est plus petite lorsque ξ est plus proche de x que de γx (on le voit moins bien). **Dessin : calcul secteur angulaire depuis x ou bien γx**

Inspirée par la structure produit de la mesure de Liouville, la construction de Patterson (en dimension 2) et Sullivan (en dimension quelconque) consiste à construire une famille de mesures de probabilité $(\nu_x)_{x\in\mathbb{H}^n}$ supportées sur $\Lambda(\Gamma)$ qui satisfont des propriétés de conformité et d'invariance analogues à celles de la classe des mesures de Lebesgue (λ_x), et de les utiliser pour construire une mesure invariante par le flot géodésique sur T^1M.

Pour remplacer la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{H}^n$ par une mesure quasi-invariante sur $\Lambda(\Gamma)$, qui est souvent un Cantor, il est naturel de construire une mesure du type mesure de Hausdorff. Les mesures ν_x vont être grosso modo des mesures de Hausdorff sur $\Lambda(\Gamma)$ muni de distances d_x adaptées.

Mentionnons la stratégie de Bowen, valide pour des systèmes dynamiques plus variés, mais seulement lorsque l'ensemble non errant est compact. Il considère la moyenne de toutes les mesures périodiques de période inférieure à T, fait tendre T vers $+\infty$ et démontre que la mesure obtenue a de bonnes propriétés.

L'approche de Patterson-Sullivan est spécifique au cadre géométrique, mais très robuste. Elle s'adapte aux groupes Kleiniens quelconques, à la courbure variable, à la notion de mesure de Gibbs, au flot géodésique de Teichmüller, ...

2.2.5 Théorèmes ergodiques classiques

Avant de passer à la construction proprement dite de la mesure de Bowen-Margulis, rappelons le théorème de récurrence de poincaré, et le théorème ergodique de Birkhoff.

Théorème 2.13 *Soit (ϕ^t) un flot préservant la mesure sur l'espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Soit $E \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(E) < \infty$. Alors μ-presque tous les points de E retournent infiniment souvent dans E, au sens où $\int_0^\infty \mathbf{1}_E(\phi^t x)\, dt = +\infty$.*

Ref Walters pour des applications. Ref pour un flot ?

Théorème 2.14 *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité, et (ϕ^t) un flot préservant μ. Si $f \in L^1(X, \mu)$, alors pour m-presque tout $x \in X$, $\frac{1}{T}\int_0^T f \circ \phi^t(x)\, dt$ converge quand $T \to \pm\infty$ vers l'espérance conditionnelle $E(f|\mathcal{I})$ de f sachant la tribu des invariants.*

3 Construction de Patterson-Sullivan et propriétés

3.1 Série de Poincaré, exposant critique

Soit Γ un groupe Kleinien, que nous supposerons non élémentaire sauf mention explicite du contraire. Soit $o \in \mathbb{H}^n$ un point fixé, par exemple le point $(0,\dots,0,1)$. La série de Poincaré $P(s)$ est définie par

$$P(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(o,\gamma o)}\,.$$

Plus généralement, on définit

$$P(x,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma o)}\,.$$

Comme Γ agit par isométries sur $\mathbb{H}^n$, le comportement (convergence ou divergence) de ces séries ne dépend pas du point x. Soit $\delta_\Gamma \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ l'exposant critique de ces séries, défini par le fait que $P(s) = +\infty$ pour $s < \delta_\Gamma$ et $P(s) < \infty$ pour $s > \delta_\Gamma$. A priori, on ne sait pas ce qui se passe en l'exposant critique (comparer $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-sn}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}e^{-sn}$). Mais de fait, ceci aura une grande importance sur les propriétés ergodiques du groupe Γ. Lorsque δ_Γ est fini, un groupe Γ sera donc dit *divergent* si $P(\delta_\Gamma) = +\infty$ et *convergent* sinon.

Notons $a_n = \#\{\gamma\in\Gamma,\, n \le d(o,\gamma.o) < n+1\}$. Observons que la série $P(s)$ est de même nature que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-sn}$ de sorte que

$$\delta_\Gamma = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#\{\gamma\in\Gamma,\, n \le d(o,\gamma.o) < n+1\}.$$

3.1.1 Propriétés des exposants critiques

Avant de construire la mesure, donnons quelques exemples de calculs d'exposants critiques.

Si $\Gamma =< h >$ est engendré par une isométrie hyperbolique, alors $d(o,h^n.o) = |n|.d(o,h.o)$ de sorte que $\delta_\Gamma = 0$. **DESSIN**

Si $\Gamma =< p >$ est engendré par une isométrie parabolique p, on utilise l'équivalent classique $d(o,p^n.o) \sim 2\log|n|$ de sorte que $\delta_\Gamma = \frac{1}{2}$. **DESSIN**.

Si $\Gamma =< p_1,\dots,p_k >$ est un groupe parabolique de rang k, alors $\delta_\Gamma = \frac{k}{2}$.

Si Γ est un sous-groupe de Γ' alors $\delta_\Gamma \le \delta_{\Gamma'}$.

Si Γ est non élémentaire, alors $\delta_\Gamma > 0$. En effet, il contient un sous-groupe de Schottky $< g,h >$, donc $\delta_\Gamma \ge \delta_{<g,h>}$. De plus $\delta_{<g,h>} \ge \frac{\log 3}{\max\{d(o,g.o),d(o,h.o)\}}$. En effet, si γ est un mot de longueur n en g et h, l'inégalité triangulaire donne $d(o,\gamma.o) \le n.\max\{d(o,g.o),d(o,h.o)\}$.

Si $\delta_\Gamma > 0$, alors

$$\delta_\Gamma = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o) \le n\}\,.$$

On a toujours $\delta_\Gamma \le n-1$, et de plus, si Γ est un réseau, i.e. $\mathbb{H}^n/\Gamma$ est de volume fini, $\delta_\Gamma = n-1$. Donnons la preuve dans le cas où Γ est cocompact. Renvoyons par exemple aux notes de M. Peigné [**?**] pour la preuve dans le cas où Γ est de covolume fini mais non cocompact.

Démonstration : Soit o fixé dans $\mathbb{H}^n$, D le diamètre de $\mathbb{H}^n/\Gamma$ et $r = \frac{1}{2}\inf_{\gamma\in\Gamma} d(o,\gamma.o)$. Alors pour $R > 0$ grand, on a

$$\sqcup_{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o)\leq R-r} B(\gamma.o, r) \subset B(o,R) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma,d(o,\gamma.o)\leq R+D} B(\gamma.o, R+D)\,.$$

Observons que l'inclusion de gauche est vraie sans hypoythèse sur Γ. Ces inclusions montrent immédiatement que

$$\#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o)\leq R\}.\mathrm{vol}(B(o,r)) \leq \mathrm{vol}(B(o,R)) \leq \#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o)\leq R+\Delta\}.\mathrm{vol}(B(o,R+D))\,.$$

Un calcul élémentaire donne $\mathrm{vol}(B(o,R)) \sim e^{(n-1)R}$ quand $R\to+\infty$. En faisant $\frac{1}{R}\log$ et en passant à la limite, on en déduit aisément que $\delta_\Gamma \leq n-1$ pour tout groupe Γ, et que $\delta_\Gamma \geq n-1$ lorsque Γ est cocompact. $\square$

Mentionnons le résultat utile suivant, que nous admettrons.

Théorème 3.1 (Roblin) *Si Γ est non élémentaire, alors δ_Γ est la limite du taux de croissance exponentielle des orbites de Γ, et pas seulement une limite supérieure.*

À titre culturel, mentionnons le résultat suivant.

Théorème 3.2 (Sullivan) *Soit Γ un groupe Kleinien non élémentaire. Si $\delta_\Gamma > \frac{n-1}{2}$, alors la première valeur propre du Laplacien satisfait $\lambda_0 = \delta_\Gamma(n-1-\delta_\Gamma)$.*

3.2 Construction d'une densité conforme invariante

La construction est due à Patterson en dimension 2, et Sullivan dans le cas général.

Soit Γ un groupe Kleinien non élémentaire, et $x\in\mathbb{H}^n$. On suppose $\delta_\Gamma < \infty$. Pour tout $s > \delta_\Gamma$, on pose

$$\nu_x^s = \frac{1}{P(s)}\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma.o)}\delta_{\gamma.o}\,.$$

Notons que ν_o^s est une probabilité sur $\mathbb{H}^n$, et ν_x^s une mesure finie.

Le compactifié $\mathbb{H}^n\cup\partial\mathbb{H}^n$ est compact, donc l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{H}^n\cup\partial\mathbb{H}^n$ est aussi compact. Choisissons donc une sous-suite $s_n\to\delta_\Gamma$ décroissante, telle que $\nu_o^{s_n}$ converge vers une mesure de probabilité ν_o sur $\mathbb{H}^n\cup\partial\mathbb{H}^n$.

Si Γ est divergent, on vérifie aisément que $\nu_o^{s_n}(K)\to 0$ pour tout compact $K\subset\mathbb{H}^n$ de sorte que ν_o est supportée sur $\partial\mathbb{H}^n$, et même sur Λ_Γ par construction.

Si Γ est convergent, une astuce due à Patterson consiste à modifier la série $P(s)$ en une série $\tilde{P}(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} h(d(o,\gamma.o)e^{-sd(o,\gamma.o)}$ et modifier la définition de ν_o^s en conséquence, de sorte que $\tilde{P}$ ait le même exposant critique δ_Γ, mais soit divergente en $s=\delta_\Gamma$, avec h une fonction à croissance lente choisie pour ne pas modifier les raisonnements qui vont suivre.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une mesure ν_o supportée dans Λ_Γ. Maintenant, pour $x\in\mathbb{H}^n$, on choisit une sous-suite s_{n_k} de s_n de sorte que $\nu_x^{s_{n_k}}$ converge vers une mesure finie ν_x sur $\Lambda(\Gamma)$.

conformal A titre d'exercice, on peut vérifier que la famille $(\nu_x)_{x\in\mathbb{H}^n}$ obtenue vérifie

1. for all $x\in\mathbb{H}^n$ and $\gamma\in\Gamma$, $\gamma_*\nu_x = \nu_{\gamma.x}$,
2. for all $x,y\in\mathbb{H}^n$,
$$\frac{d\nu_x}{d\nu_y}(\xi) = \exp(-\delta_\Gamma\beta_\xi(x,y)\,.$$

Une famille de mesures (ρ_x) vérifiant ces deux propriétés pour un $\delta > 0$ quelconque est appelée une densité δ-conforme.

Ainsi, la construction de Patterson peut être résumée ainsi.

Théorème 3.3 (Patterson) *Si Γ est un groupe Kleinien non élémentaire, alors il existe une densité δ_Γ-conforme supportée par l'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$.*

Nous verrons plus tard que lorsque Γ est divergent, il existe une unique densité conforme d'exposant δ_Γ.

Remarque 3.4 La famille de mesures visuelles (sphériques) (λ_x) sur chaque sphère unité $T^1_x\mathbb{H}^n$, vue comme une famille de mesures sur $\partial\mathbb{H}^n$ via l'homéomorphisme $v \in T^1_x\mathbb{H}^n \mapsto v^+ \in \partial\mathbb{H}^n$, est une densité conforme invariante d'exposant $n-1$ et de support $\partial\mathbb{H}^n$, et ce, *pour tout groupe discret d'isométries* Γ. Cette famille est intéressante surtout pour les groupes tels que $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n$, dits de *première espèce.*

Ainsi, par exemple, il est notable que c'est la densité conforme invariante d'exposant $\delta_\Gamma = n-1$ pour tous les réseaux Γ de $\mathbb{H}^n$.

3.3 Le lemme de l'ombre de Sullivan

Une *ombre* $\mathcal{O}_x(B(y,R))$ est l'ombre faite par la boule $B(y,R)$, vue du point x, quand on regarde le bord à l'infini. En d'autres termes,

$$\mathcal{O}_x(B(y,R)) = \{\xi \in \partial\mathbb{H}^n,\, [x,\xi) \cap B(y,R) \neq \emptyset\}\,,$$

où $[x,\xi)$ désigne le rayon géodésique de x à ξ.

Théorème 3.5 (Sullivan's Shadow lemma) conformal *Soit $(\nu_x)_{x\in\mathbb{H}^n}$ une densité δ-conforme invariante, i.e. une mesure satisfaisant (3.2). Supposons qu'elle a support Λ_Γ. Pour tout $x \in \mathbb{H}^n$ il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r > r_0$ il existe une constante $C_{r,x} > 0$ telle que pour tout $\gamma \in \Gamma$,*

$$\frac{1}{C_{r,x}} e^{-\delta d(x,\gamma x)} \leq \nu_x(\mathcal{O}_x(B(\gamma.x,r)) \leq C_{r,x} e^{-\delta d(x,\gamma x)}\,.$$

Démonstration : En utilisant les deux propriétés d'une densité δ-conforme et l'inégalité triangulaire dans un triangle de sommets $\gamma^{-1}.x$, x, et un point $\xi \in \mathcal{O}_{\gamma^{-1}x}(B(x,r))$, on obtient

$$\nu_x(\mathcal{O}_x(B(\gamma.x,r)) = \nu_{\gamma^{-1}x}(\mathcal{O}_{\gamma^{-1}x}(B(x,r)) \asymp e^{-\delta d(x,\gamma^{-1}x)} \nu_x(\mathcal{O}_{\gamma^{-1}x}(B(x,r))$$

Le terme de droite est majoré par la masse totale de ν_x. Pour obtenir la minoration, il suffit d'observer que $\inf_{y\in\mathbb{H}^n\cup\partial\mathbb{H}^n} \nu_x(\mathcal{O}_y(B(x,r))$ est strictement positif dès que r n'est pas trop petit, de sorte que pour tout $y \in \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$, l'ombre vue de y de la boule $B(x,r)$ intersecte l'ensemble limite. $\square$

Ce lemme de l'ombre a connu diverses généralisations, par plusieurs personnes, pour les groupes géométriquement finis à cusps, en remplaçant $\gamma.x$ par un point dans le cusp (Stratmann-Velani [**?**], Schapira [**?**], Hersonsky-Paulin [**?**]).

Mentionnons un corollaire facile du lemme de l'ombre, qui a son utilité.

Corollaire 3.6 *Une densité δ-conforme invariante n'a pas d'atome dans l'ensemble limite radial.*

Démonstration : En effet, un point $\xi \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$ appartient à une infinité d'ombres $\mathcal{O}_o(B(\gamma_n.o,R))$, pour un certain $R > 0$, avec $\gamma_n.o$ qui converge vers ξ. La conclusion découle du lemme de l'ombre. $\square$

3.4 La construction de Patterson-Sullivan de la mesure de Bowen-Margulis

Grâce aux coordonnées de Hopf $v = (v^-, v^+, t)$, on définit sur $\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n$ une mesure de Radon invariante par les deux actions du flot géodésique et du groupe Γ par la formule

$$d\tilde{m}_{BM}(v) = e^{\delta_\Gamma \beta_{v^+}(o,\pi(v)) + \delta_\Gamma \beta_{v^-}(o,\pi(v))}\, d\nu_o(v^-)\, d\nu_o(v^+)\, dt\,.$$

Le lecteur vérifiera aisément les propriétés d'invariance. De plus, la formule ci-dessus ne dépend pas du choix du point o, d'après les propriétés de conformité de $(\nu_x)_{x\in\mathbb{H}^n}$.

Quand la mesure ν_o n'a pas d'atome, la mesure $\tilde{m}_{BM}$ donne une masse zéro à la diagonale de $\partial\mathbb{H}^n \times \partial\mathbb{H}^n$. Ainsi, elle définit au quotient sur T^1M une mesure de Radon invariante par le flot géodésique, appelée *la mesure de Bowen-Margulis*. En fait, avant cette construction géométrique due à Patterson et Sullivan, Bowen et Margulis ont donné (indépendemment) deux constructions alternatives de cette mesure, en utilisant des moyennes sur des orbites périodiques pour le premier, et des moyennes sur les feuilles du feuilletage fortement stable pour le second.

La terminologie *la mesure de Bowen-Margulis* est un abus de notation puisque nous n'avons pas justifié l'unicité de la mesure produite par cette construction (rappelons que nous avons pris des valeurs d'adhérence arbitraires de ν_x^s). Mais elle est justifiée, car nous montrerons plus tard l'unicité de la mesure produite par cette construction, lorsque Γ est divergent.

3.4.1 L'argument de Hopf

Cette mesure de Bowen-Margulis va nous permettre, lorsqu'elle est finie, de démontrer le résultat de comptage de Roblin. Mais avant cela, il nous faut comprendre sous quelles conditions justement cette mesure va être finie, conservative, ergodique, ou mélangeante.

Remarque 3.7 Lorsque la mesure m_{BM} est finie, elle est conservative par le théorème de récurrence de Poincaré.

Nous allons donner la démonstration du théorème suivant.

Théorème 3.8 (Hopf) Lorsque m_{BM} est finie, elle est ergodique.

Hopf a démontré ce théorème dans le cas particulier de la mesure de Liouville sur des surfaces mais l'argument, très général et très profond, est identique dans le cas ci-dessus.

Une variante de cet argument, que nous ne présenterons pas, permet d'obtenir mieux.

Une mesure m est dite *mélangeante* si pour tous ensembles A et B de mesure finie non nulle, on a $m(A\cap g^tB) \to m(A)m(B)$ quand $t \to \pm\infty$. Ceci signifie que le futur et le passé des trajectoires sont, en moyenne, asymptotiquement indépendants, au sens des probabilités. C'est ainsi que le comportement asymptotique du flot géodésique présente de nombreuses analogies avec celui d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Théorème 3.9 (Babillot) *Lorsque m_{BM} est finie, elle est mélangeante.*

Ce théorème est initialement dû à Rudolph dans le cas géométriquement fini. Une autre rédaction est due à Coudène.

En réalité, ergodicité et mélange sont dus à la structure produit de la mesure, qui est la source de l'indépendance entre le passé et le futur.

Une autre variante de la preuve de Hopf permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 3.10 *Si la mesure de Bowen-Margulis est conservative, alors elle est ergodique.*

Une dernière variante donne le résultat suivant.

Proposition 3.11 *Si m_{BM} est ergodique, alors elle est uniquement définie.*

Dans ce paragraphe, nous démontrons que la mesure de Bowen-Margulis, lorsqu'elle est finie, est ergodique. Nous ne donnerons pas les démonstrations des variantes présentées ci-dessus. Rappelons qu'une mesure m est *ergodique* si pour tout borélien A tel que $g^t A = A$ m-p.s. pour tout t, on a $m(A) = 0$ ou $m(A^c) = 0$. Ceci équivaut à dire qu'une fonction $f : T^1M \to \mathbb{R}$ mesurable qui est m-presque surement invariante est constante m-presque surement.

La preuve a l'air simple mais cache quelques subtilités importantes.

Démonstration : Supposons m_{BM} is finite. Rappelons aussi que, à une densité près qui ne joue pas de rôle et que nous négligerons donc dans la preuve, m_{BM} est égale au produit $\nu_o \times \nu_o \times dt$.

L'ergodicité de la mesure de Bowen-Margulis signifie qu'une application intégrable invariante est constante m_{BM}-presque surement.

On peut reformuler cela de la manière suivante. Soit donc $f : T^1M \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Son *espérance conditionnelle $E(f|\mathcal{I})$ sachant la tribu des invariants* est sa projection sur l'espace des fonctions mesurables invariantes presque-surement. Il suffit donc de démontrer que pour toute fonction intégrable $f : T^1M \to \mathbb{R}$, son espérance conditionnelle est constante m-presque surement.

Comme les fonctions uniformément continues sont denses dans $L^1(T^1M, m_{BM})$, on peut supposer f uniformément continue.

Considérons les applications suivantes.

$$f^+(v) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(g^s v)\, ds \quad \text{and} \quad f^-(v) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(g^s v)\, ds\,.$$

Le théorème de Birkhoff affirme que ces applications f^+ et f^- sont bien définies m_{BM}-presque surement et coincident m_{BM}-presque surement.

Comme f est uniformément continue, on vérifie que f^+ est invariante le long des orbites du flot géodésique, et le long des variétés stables: si $w \in W^{ss}(v)$, alors $d(g^t v, g^t w) \to 0$ donc $f^+(w) = f^+(v)$. Ainsi, f^+ ne dépend donc que de v^+ dans les coordonnées de Hopf.

De manière analogue, on vérifie que f^- ne dépend que de v^- dans les coordonnées de Hopf.

Il semble alors aisé de conclure que $E(f|\mathcal{I})$ est constante m_{BM}-presque surement, puisqu'elle coincide presque surement avec une fonction f^+ qui ne dépend que de v^+, et presque suremet avec une fonction f^- qui ne dépend que de v^-. La preuve rigoureuse de ce fait intuitif utilise de manière cruciale le fait que m_{BM} est une mesure produit, par exemple via le théorème de Fubini.

En utilisant les propriétés ci-dessus, et le fait que ν_o est une proba, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial^2\mathbb{H}^n\times[O,1]} (E(f|\mathcal{I}))^2\, d\nu_o(v^-)d\nu_o(v^+)dt &= \int (f^+(v))^2 d\nu_o(v^-)d\nu_o(v^+)dt \\ &= \int_{\partial^2\mathbb{H}^n\times[0,1]} f^+(v)f^-(v)d\nu_o(v^-)d\nu_o(v^+)dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int f^+(v^+)f^-(v^-)d\nu_o(v^+)d\nu_o(v^-)dt \\
&= \left(\int f^+(v^+)d\nu_o(v^+)\right)\left(\int f^-(v^-)d\nu_o(v^-)\right) \\
&= \left(\int_{\partial^2\mathbb{H}^n\times[0,1]} E(f|\mathcal{I})(v)dm_{BM}(v)\right)^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Ceci ne peut se produire que si $E(f|\mathcal{I})$ est constante presque surement. □

Pour montrer que si m_{BM} est conservative, alors elle est ergodique on remplace le théorème ergodique de Birkhoff par le théorème ergodique de Hopf. Il y a quelques ajouts techniques dans la preuve mais l'idée reste la même.

Remarque 3.12 La lourdeur de la preuve intrigue comparée au côté intuitif de l'argument: une fonction presque surement égale à v^+ et presque surement égale à v^- doit être presque surement constante.

Pour vous convaincre que la structure produit est cruciale, considérez une mesure μ qui est la somme de deux mesures invariantes sur deux orbites périodiques disjointes. Elle est donc non ergodique. Et ce n'est pas une mesure produit. Considérons une application f qui prend deux valeurs différentes sur ces deux orbites disjointes. Elle est invariante, mais non constante. De plus, elle dépend presque surement uniquement de v^+ et presque surement uniquement de v^-. **Dessin carré, graphe, mesure supportée par un graphe.**

3.4.2 Critères de finitude

Rappelons que Γ (ou $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$) est dit géométriquement fini si M a un nombre fini de bouts, qui sont tous soit des cusps, soit des trompettes. De manière équivalente, $\Lambda(\Gamma)$ est composé uniquement de points limites radiaux ou de points paraboliques bornés. Lorsque $n = 2$ cela signifie simplement que Γ est de type fini.

Théorème 3.13 (Sullivan) *Quand $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^n$ est géométriquement fini, la mesure de Bowen-Margulis est finie.*

Notons que le résultat ci-dessus est faux en courbure négative variable.

Théorème 3.14 (Peigné) *Il existe des variétés hyperboliques géométriquement infinies dont la mesure de Bowen-Margulis est finie.*

3.5 Hopf-Tsuji-Sullivan

Il y a une très importante dichotomie entre le cas où Γ est divergent, i.e. la série $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma x)}$ diverge en l'exposant critique δ_Γ, et le cas où Γ est convergent, quand la série converge en $s = \delta_\Gamma$.

Pour les lecteurs qui ont une culture probabiliste, le théorème de dichotomie de Hopf-Tsuji-Sullivan est une version du lemme de Borel-Cantelli adapté au flot géodésique à la place d'une suite de variables aléatoires indépendantes, l'indépendance étant remplacée par la structure produit du flot géodésique, et ses conséquences.

Théorème 3.15 (La dichotomie de Hopf, cas divergent) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe Γ est divergent;*

2. *La mesure de Patterson-Sullivan ν_o donne masse totale à l'ensemble limite radial : $\nu_o(\Lambda_{rad}) = 1$;*

3. *Le flot géodésique est ergodique et conservatif pour la mesure de Bowen-Margulis m_{BM}, i.e. pour m_{BM}-presque tout $v \in T^1M$, il existe un voisinage K de v tel que $\int_0^\infty \mathbf{1}_K(g^t v)\, dt = +\infty$.*

4. *l'action de Γ sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \setminus \{Diagonal\}$ est ergodique et conservative.*

Théorème 3.16 (La dichotomie de Hopf cas convergent) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le groupe Γ est convergent;*

2. *La mesure de Patterson-Sullivan ν_o donne mesure zéro à l'ensemble limite radial : $\nu_o(\Lambda_{rad}) = 0$.*

3. *Le flot géodésique est totalement dissipatif pour la mesure de Bowen-Margulis, i.e. pour m_{BM}-presque tout $v \in T^1M$, et tout voisinage K de v, $\int_0^\infty \mathbf{1}_K(g^t v)\, dt < +\infty$.*

4. *l'action de Γ sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \setminus \{Diagonal\}$ est totalement dissipative.*

Nous pourrions ajouter des précisions, mais ces énoncés présentent les points clé.

Remarque 3.17 D'après le théoréme de récurrence de Poincaré, une mesure finie invariante est conservative. Ainsi, dès que la mesure de Bowen-Margulis est finie, elle est ergodique. Mais cette dichotomie ne donne pas une preuve alternative de l'ergodicité, car l'argument de Hopf sert dans la preuve du résultat ci-dessus.

Comme nous l'avons déjà mentionné, une variante de l'argument de Hopf permet de montrer que

Théorème 3.18 *Quand la mesure de Bowen-Margulis est ergodique et conservative, alors c'est l'unique mesure donnée par la mesure de Patterson-Sullivan. En d'autres termes, quand Γ est divergent, il existe une unique densité δ_Γ-conforme invariante sur le bord.*

Ce théorème nous donne enfin la justification de la terminologie ¡¡ la mesure de Bowen-Margulis ¿¿.

Nous allons maintenant aborder la preuve de la dichotomie de Hopf, mais en donnant seulement les idées principales, et en omettant quelques difficultés techniques parfois subtiles.

Mais avant la preuve, rappelons l'énoncé probabiliste suivant.

Lemme 3.19 (Borel-Cantelli) *Soit (A_n) une suite d'événements indépendants sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

1. *Si $\sum_n P(A_n) < \infty$, alors $P(\limsup A_n) = 0$*

2. *Si les (A_n) sont indépendants et $\sum_n P(A_n) = +\infty$, alors $P(\limsup A_n) = 1$.*

Passons maintenant à la preuve du théorème de dichotomie de Hopf.

Démonstration : Rappelons que par définition, un vecteur $v \in T^1M$ a un relevé (et donc tous ses relevés) qui pointe vers l'ensemble limite radial, i.e. $v^+ \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$ si et seulement si le rayon géodésique $(g^t v)_{t\geq 0}$ revient infiniment souvent dans un compact. En utilisant cette simple idée, et la construction de la mesure de Bowen-Margulis à partir de la mesure de Patterson sur le bord ν_o, les équivalences suivantes sont faciles à montrer (et laissées en exercice).

• $\nu_o(\Lambda_{rad}(\Gamma)) = 0$ ssi l'action de Γ sur $\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \setminus \{diagonal\}$ est totalement dissipative pour la mesure $\nu_o \otimes \nu_o$, ssi l'action du flot géodésique (g^t) sur Ω est totalement dissipative pour m_{BM}.

• $\nu_o(\Lambda_{rad}) = 1$ ssi (g^t) est conservative relativement à la mesure m_{BM}.

• La mesure m_{BM} est ergodique et conservative ssi l'action de Γ sur $\partial^2\mathbb{H}^n$ est ergodique et conservative relativement à $\nu_o \otimes \nu_o$.

Par conséquent, les étapes clé de la preuve sont résumées dans les énoncés suivants.

Convergent-case

Lemme 3.20 *Si* $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\delta_\Gamma d(x,\gamma x)} < \infty$*, alors* $\nu_o(\Lambda_{rad}) = 0$*.*

Divergent-case

Lemme 3.21 *Si* $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\delta_\Gamma d(x,\gamma x)} = +\infty$*, alors* $\nu_o(\Lambda_{rad}(\Gamma)) > 0$*.*

Lemme 3.22 *Si* $\nu_o(\Lambda_{rad}(\Gamma) > 0$*, alors* $\nu_o(\Lambda_{rad}(\Gamma)) = 1$*.*

Ce dernier énoncé sera admis, car sa preuve n'est pas très longue, mais les arguments n'ont rien à voir avec le reste du cours.

Démontrons d'abord le lemme Convergent-case 3.20. L'analogie avec le lemme de Borel-Cantelli laisse imaginer que c'est la partie facile de la preuve.

Démonstration : Observons que $\Lambda_{rad}(\Gamma) = \cup_{N\in\mathbb{N}}\Lambda^N_{rad}(\Gamma)$, où $\Lambda^N_{rad}(\Gamma)$ est défini comme l'ensemble des points $\xi \in \Lambda_{rad}(\Gamma)$ tels qu'il existe une suite $\gamma_n.o$ qui converge vers ξ en restant à distance au plus N du rayon géodésique $[o,\xi)$. Il suffit donc de montrer que $\Lambda^N_{rad}(\Gamma)$ est de mesure nulle. Mais $\Lambda^N_{rad}(\Gamma) \subset \cup_{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o)\geq T}\mathcal{O}_o(B(\gamma.o,N))$ de sorte que, par le lemme de l'Ombre,

$$\nu_o(\Lambda^N_{rad}(\Gamma)) \leq C_{o,N} \sum_{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma.o)\geq T} e^{-\delta_\Gamma d(o,\gamma.o)}\,.$$

La somme de droite est le reste d'une série convergente, de sorte qu'elle converge vers 0 quand $T \to +\infty$. Ceci conclut la preuve du lemme. $\square$

Donnons quelques unes des idées de la preuve du lemme Divergent-case 3.21.

Démonstration : Nous voulons montrer que $\nu_o(\Lambda_{rad}) > 0$, ou de manière équivalente, qu'il existe un ensemble de m_{BM}-mesure positive de vecteurs v qui reviennent infiniment souvent dans un compact. Il suffit de montrer que par exemple, pour $K = T^1B(o,R) \subset T^1M$, l'ensemble $\{v \in K, \int_0^+ \infty \mathbf{1}_K(g^t v)\,dt = +\infty\}$ a une mesure positive. En particulier, si c'est vrai, cela implique

$$\int_K \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_K(v)\mathbf{1}_K(g^t v)\,dt\,dm_{BM}(v) = +\infty\,.$$

Nous n'allons pas montrer le lemme, mais seulement donner (la trame de) la preuve de cet énoncé plus faible. En effet, la preuve est bien plus courte, mais contient les idées clés.

Relevons K en $\widetilde{K}$, le fibré unitaire tangent d'une boule, encore noté $T^1B(o,R)$. On a

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_K(v)\mathbf{1}_K(g^t v)\,dt = \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\widetilde{K}}(v)\mathbf{1}_{\gamma\widetilde{K}}(g^t v)\,dt\,.$$

Observons qu'à des constantes près, lorsque $d(o,\gamma o) \simeq t$, **DESSIN**
l'ensemble $K \cap g^{-t}\gamma K$ coincide presque avec l'ensemble des vecteurs $\{v \in T^1M, \pi(v) \in K, v+ \in \mathcal{O}_o(B(\gamma o, R))\}$ de sorte que, en utilisant de manière cruciale la structure produit de la mesure de Bowen-Margulis $m_{BM} \sim \nu_o \times \nu_o \times dt$, on a

$$\tilde{m}_{BM}(\widetilde{K} \cap g^{-t}\gamma\widetilde{K}) \asymp \nu_o(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, R))) \asymp e^{-\delta_\Gamma d(o,\gamma o)}$$

Ainsi, nous pouvons estimer notre intégrale, comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{1}_K(v)\mathbf{1}_K(g^t v)\, dt &= \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\widetilde{K}}(v)\mathbf{1}_{\gamma\widetilde{K}}(g^t v)\, dt \\ &\asymp \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\gamma\in\Gamma,\, n\le d(o,\gamma o)<n+1} e^{-\delta_\Gamma d(o,\gamma o)} \end{aligned}$$

Le dernier terme est infini car le groupe Γ est supposé divergent. Ceci prouve l'assertion ci-dessus. La preuve du lemme utilise des raffinements de cette idée.

□

□

4 Comptage

4.0.1 Énoncé

Théorème 4.1 (Roblin) *Soit Γ un groupe Kleinien non élémentaire. Si la mesure de Bowen-Margulis est finie, alors il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\#\{\gamma \in \Gamma,\, d(o, \gamma.o) \le T\} \sim ce^{\delta_\Gamma T}\,.$$

De plus, si K est le fibré unitaire tangent d'une boule $B(o,r)$ assez grande, il existe une constante $C > 0$ telle que $\#\{p \in \mathcal{P}, p \cap K \neq \emptyset,\, l(p) \le T\} \sim C\frac{e^{\delta_\Gamma T}}{T}$.

En fait, Roblin a aussi un énoncé, moins précis, dans le cas de mesure infinie. Alors les fonctions de comptage sont en $o(e^{\delta_\Gamma T})$.

Observons que sur une variété compacte, les énoncés de comptage d'orbites périodiques donnent une estimée asymptotique du nombre d'orbites périodiques de longueur au plus T. Lorsque la variété est non compacte, la restriction à l'ensemble des orbites périodiques intersectant un compact K arbitraire fixé est nécessaire. En effet, sur une variété non compacte typique, le nombre d'orbites périodiques de longueur au plus T a toutes les chances d'être infini.
DESSIN $\mathbb{Z}$-revêtement

4.1 Démonstrations

Rappelons que l'argument de Hopf (ou un raffinement de celui-ci plutôt) permet de démontrer que la mesure de Bowen-Margulis, lorsqu'elle est finie, est mélangeante, au sens où pour tous A, B on a

$$m_{BM}(A \cap g^t B) \to m_{BM}(A)m_{BM}(B)$$

quand $t \to \pm\infty$.

Le "vrai" théorème que démontre Roblin, dont découlent les énoncés de comptage ci-dessus, est le suivant.

equid **Théorème 4.2 (Roblin)** *Si la mesure de Bowen-Margulis du groupe Γ est finie, alors*

$$\nu^t = \frac{c}{e^{\delta_\Gamma t}} \sum_{\gamma\in\Gamma,\, d(o,\gamma o)\leq t} \delta_{\gamma.o}\otimes\delta_{\gamma^{-1}.o}$$

converge faiblement vers $\nu_o\otimes\nu_o$.

L'énoncé sur l'asymptotique de $\#\{\gamma\in\Gamma,\, d(o,\gamma.o)\leq t\}$ résulte immédiatement du théorème ci-dessus.

Nous allons donner une idée de la preuve de ce théorème, puis une idée de la preuve du comptage des orbites périodiques.

Démonstration : Rappelons d'abord que l'exposant critique vérifie

$$\delta_\Gamma = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma o)\leq n\}\,.$$

Soit $A\subset\partial\mathbb{H}^n$ un ouvert qui intersecte $\Lambda(\Gamma)$ et $\mathcal{C}_o(A)$ le cone de $\mathbb{H}^n$ enveloppe convexe de o et de A. En remarquant qu'un nombre fini d'images $\gamma_i A$ recouvrent $\Lambda(\Gamma)$, Roblin montre que

$$\delta_\Gamma = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma o)\leq n,\, \gamma o\in\mathcal{C}_o(A)\}\,.$$

Le même argument appliqué une fois de plus lui permet de montrer que si A,B sont deux ouverts du bord qui rencontrent Λ_Γ, alors

$$\delta_\Gamma = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#\{\gamma\in\Gamma, d(o,\gamma o)\leq n,\, \gamma o\in\mathcal{C}_o(A),\, \gamma^{-1}o\in\mathcal{C}_o(B)\}\,.$$

Notons maintenant $\tilde K_A^+ = \{v\in T^1B(o,r), v^+\in A\}$ et K_A^+ son image au quotient dans $T^1M = T^1\mathbb{H}^n/\Gamma$. De même, notons $\tilde K_B^-) = \{v\in T^1B(o,r), v^-\in B\}$ et K_B^- son image au quotient.

Le mélange de m_{BM} nous assure que $m_{BM}(K_A\cap g^tK_B)\to m_{BM}(K_A)m_{BM}(K_B)$. Par ailleurs, la structure produit de m_{BM} nous assure qu'à peu de choses près, $m_{BM}(K_A)\simeq\nu_o(A)$ et $m_{BM}(K_B)\simeq\nu_o(B)$.

On considère alors la quantité

$$\int_0^T e^{\delta_\Gamma t} m(K_A\cap g^tK_B)\,dt$$

D'une part, la propriété de mélange nous dit qu'elle est proche, quand T est grand, de $\int_0^T e^{\delta_\Gamma t}m_{BM}(K_A)m_{BM}(K_B)\sim e^{\delta_\Gamma T}m_{BM}(K_A)m_{BM}(K_B)$.

D'autre part, par un raisonnement analogue à celui déjà vu dans la preuve du théorème de Hopf Tsuji Sullivan, on a $\tilde K_A\cap g^t\tilde K_B\simeq\{v\in T^1B(o,r),\, v^+\in A, v^-\in B,\, g^{-t}v\in B(\gamma^{-1}o,r)\}$.

De sorte que l'intégrale ci-dessus est proche de la somme

$$\sum_{\gamma\in\Gamma,\gamma o\in\mathcal{C}_o(A),\gamma^{-1}o\in\mathcal{C}_o(B)} e^{\delta_\Gamma d(o,\gamma o)}\nu_o(\mathcal{O}_o(B(\gamma o,r))$$

Le lemme de l'ombre nous dit que la mesure apparaissant à droite vaut environ $e^{-\delta_\Gamma d(o,\gamma o)}$ de sorte que la somme vaut

$$e^{\delta_\Gamma T}\nu^T(\mathcal{C}_o(A)\times\mathcal{C}_o(B))\,.$$

Finalement, à quelques ε près on a bien démontré que quand $T \to +\infty$, ν^T converge vers $\nu_o \otimes \nu_o$. Ceci conclut la preuve du théorème equid 4.2. $\square$

Passons maintenant à la démonstration de l'estimée asymptotique du cardinal des orbites périodiques de longueur au plus T. En fait, nous allons nous contenter de montrer le résultat plus faible suivant.

Théorème 4.3 *Soit Γ un groupe Kleinien dont la mesure de Bowen-Margulis est finie, et soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des orbites périodiques de (g^t) sur $T^1M = T^1(\mathbb{H}^n/\Gamma)$. Alors*

$$\delta_\Gamma = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \log \#\{p \in \mathcal{P}, p \cap K \neq \emptyset,\, l(p) \leq T\}$$

Démonstration : D'abord, si $p \in T^1M$ est périodique, et $\tilde{p}$ est un relevé à $T^1\mathbb{H}^n$ de p, l'orbite $(g^t p)$ se relève à $T^1\mathbb{H}^n$ en le fibré unitaire tangent de l'axe d'une isométrie hyperbolique, notée γ_p. De plus, si $g\tilde{p}$ est un autre relevé de p, alors son orbite est tangente à l'axe de $g\gamma_p g^{-1}$.

Soit $K = T^1B(o,r) \subset T^1M$ et $\tilde{K} = T^1B(o,r) \subset T^1\mathbb{H}^n$ Si p est périodique et $g \cap K \neq \emptyset$, alors il existe $\gamma_p \in \Gamma$ dont l'axe se projette sur p et intersecte $\tilde{K}$. L'inégalité triangulaire donne $l(p) \leq d(o, \gamma_p.o) + 2r$. **dessin axe γ_p, K, o**

Ainsi, on a immédiatement

$$\#\{p \in \mathcal{P}, l(p) \leq T\} \leq \#\{\gamma \in \Gamma, d(o,\gamma o) \leq T + 2r\}\,.$$

Inversement, on utilise le fait que si A, B sont deux ouverts du bord qui rencontrent $\Lambda(\Gamma)$, alors

$$\delta_\Gamma = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \log \#\{\gamma \in \Gamma, d(o,\gamma o) \leq T, \gamma o \in \mathcal{C}_o(A), \gamma^{-1} o \in \mathcal{C}_o(B)\}\,.$$

Maintenant, si γ est une isométrie telle que $\gamma o \in \mathcal{C}_o(A)$ et $\gamma^{-1} o \in \mathcal{C}_o(B)$, lorsque $d(o,\gamma o)$ n'est pas trop petite, γ est hyperbolique, donc donne lieu au quotient à une orbite périodique p_γ. De plus, le nombre de γ donnant lieu à la même orbite p est borné par $\#\{g \in \Gamma, g\gamma g^{-1} o \in \mathcal{C}_o(A), g^{-1}\gamma^{-1} g o \in \mathcal{C}_o(B)\}$, qui croît au plus linéairement en T. $\square$

L'énoncé le plus fort que montre Roblin, dû à Bowen pour les systèmes Anosov sur un espace compact, à Margulis ? **VERIFIER BIBLIO** est le suivant.

Théorème 4.4 *Supposons que Γ est un groupe Kleinien dont la mesure de Bowen Margulis est finie. Alors*

$$\frac{1}{e^{\delta_\Gamma T}} \sum_{p \in \mathcal{P}, p\cap K \neq \emptyset} \delta_p$$

converge faiblement vers la mesure de Bowen-Margulis normalisée $\frac{m_{BM}}{\|m_{BM}\|}$, où δ_p désigne la mesure périodique sur l'orbite de p.

5 Plus sur l'entropie

Définition d'une boule dynamique (symétrique, c'est plus facile ensuite)

Entropie d'une mesure (définition de Brin-Katok ou de Katok dans cas compact ergodique) Kolmogorov Sinai historiquement

Entropie topologique (définition Bowen) Historiquement Adler etc ? Recouvrements ouverts ?

Démontrer que l'exposant critique est l'entropie topologique (à la Bishop-Jones)

Principe variationnel (vérifier hypothèses, très général) Existence et unicité d'une mesure réalisant le sup (plus ou moins général)

La mesure de Bowen-Margulis, quand elle est finie, est la mesure d'entropie maximale. Preuve en utilisant le lemme de l'ombre et la définition de Brin katok

Citer le thm Otal-Peigné

5.1 Several definitions of entropy

Entropy is an invariant measuring the exponential growth rate of the complexity of the dynamics. But there are several ways to understand this sentence, and therefore several definitions, which coincide in good cases.

All good definitions satisfy the relation $h(g^t) = |t|h(g^1)$, so that we consider the time-one map of the geodesic flow.

Historically, the first notion of entropy is the Kolmogorov-Sinai entropy, but it is not the simplest to define, so that we begin with the topological entropy.

The following definition is due to Bowen. Let d be a distance on $X = T^1M$. Let $K \subset X$ be a compact set. A set $E \subset K$ is said (ε, N, K) separated if $E \subset K$, and for all $x \neq y$ in E, and all $0 \leq k \leq n$, one has $d(g^k x, g^k y) \geq \varepsilon$.

The *topological entropy* of $g : (X, d) \to (X, d)$ is defined as

$$h^d(g) = \sup_K \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log \max \#E\,,$$

the maximum being over all (ε, N, K) separated sets of K. Let us emphasize the fact that when X is non compact, this definition strongly defines on the distance d. Given a topology on X, one has $\sup_d h^d(g) = +\infty$, the supremum being considered over all distances defining the topology.

Therefore, the good notion of topological entropy is

$$h_{top}(g) = \inf_d h^d(g)\,.$$

Definition Kolmogorov Sinai entropy

Handel-Kitchens

Critical exponent

Théorème 5.1 (Otal-Peigné [?])

Gurevic entropy : growth rate of periodic orbits

Théorème 5.2 (Roblin)

5.1.1 Section virtuelle

5.2 Critical exponents and dimension

Notice that, by definition, a vector $v \in T^1M$ admits a lift $\tilde{v} \in T^1\mathbb{H}^n$ such that v^+ belongs to the radial limit set if and only if the geodesic ray $(g^t v)_{t\geq 0}$ returns infinitely often in a compact set. The famous result of Bishop-Jones below states that, in some sense, the critical exponent is the size of the set of vectors whose geodesic returns infinitely often in a compact set.

Théorème 5.3 (Bishop-Jones [?]) *Let Γ be a nonelementary Kleinian group. Then δ_Γ is the Hausdorff dimension of the radial limit set.*

S'il y avait trop de temps.

Partition, définition entropie,

stratégie de la preuve Otal-Peigné à la Ledrappier Young

References

Babillot [Ba] Babillot

Beardon [Be] Beardon

BP [BP] Benedetti Petronio

Bourdon [Bo] Bourdon

Buser [Bu] Buser

EW [EW] Einsiedler Ward

KH [KH] Katok Hasselblatt

Manning [Ma] A. Manning

OP [OP] Otal Peigné

Paternain [P] Gabriel Paternain, Geodesic flows

Patterson [Pa] Patterson

Roblin [R] Thomas Roblin Mémoire SMF

Sullivan [Su] Dennis Sullivan