

Counting closed geodesics on hyperbolic surfaces

Random Geometry seminar

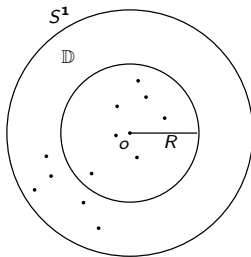
Online, november 2020

Closed geodesics on a euclidean torus

Un groupe discret Γ agit sur un / l'espace hyperbolique X (par ex. $X = \mathbb{H}^n$).

L'exposant critique de cette action est

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \# \{ \gamma \in \Gamma, d(o, \gamma o) \leq R \}.$$



Exposants critiques

Il coïncide avec

→ la **dimension** de l'ensemble limite (radial) $\Lambda_{rad}(\Gamma)$ dans ∂X

→ l'**entropie** du flot géodésique sur $T^1(X/\Gamma)$

Bien sûr, si $\Gamma' < \Gamma$, $\delta_{\Gamma'} \leq \delta_{\Gamma}$.

Question : Quand a-t-on égalité $\delta_{\Gamma'} = \delta_{\Gamma}$?

Notre résultat

Théorème : (Coulon-Dougall-Sch.-Tapie 2019) Soit Γ un groupe discret agissant sur un espace hyperbolique X , avec un *saut d'entropie à l'infini* $\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma$. Soit $\Gamma' < \Gamma$ un sous-groupe. Alors

$$\delta_{\Gamma'} = \delta_\Gamma \quad \text{ssi} \quad \Gamma/\Gamma' \quad \text{moyennable}.$$

Résultat déjà connu dans différents cas :

- Brooks (81,85) : actions convexe-cocompactes sur $\mathbb{H}^n$, avec $\delta_\Gamma > n/2$
- Grigorchuk, Cohen (80, 82) : action d'un groupe libre sur son graphe de Cayley
- Stadlbauer: actions convexe-cocompactes (géom. finies) sur $\mathbb{H}^n$
- Dougall-Sharp : actions convexe-cocompactes, courbure nég. variable
- Coulon-Dal'bo-Sambusetti : actions cocompactes, $CAT(-1)$
- Roblin (03) : moyennabilité implique égalité quand $\Gamma' \triangleleft \Gamma$

Moyennabilité

Le groupe Γ' est co-moyennable dans Γ si la représentation régulière

$$\rho : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$$

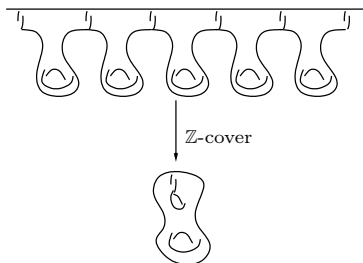
défini par $\rho(\gamma)(\varphi)(\cdot) = \varphi(\gamma \cdot)$ admet presque des vecteurs invariants :

pour tout $\varepsilon > 0$ et $S \subset \Gamma$ fini, il existe $\varphi \in \ell^2(\Gamma/\Gamma')$ tel que pour $\gamma \in S$, $\|\rho(\gamma)\varphi - \varphi\| < \varepsilon\|\varphi\|$.

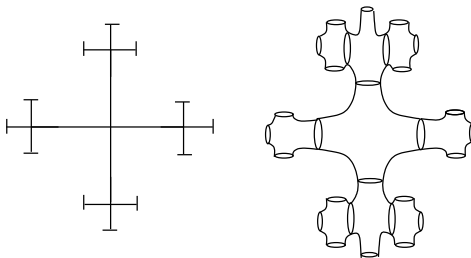
Groupe moyennable typique : $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^d$

Groupe non moyennable typique : $\mathbb{F}^n$

Revêtements (Non)-moyennables



Un $\mathbb{F}_2$ -revêtement d'une surface hyperbolique compacte.



Entropie à l'infini

Le groupe Γ agit sur X (par ex. $X = \mathbb{H}^n$). Soit $K \subset X$ un compact, $o \in K$. On définit

$$\Gamma_K = \{\gamma \in \Gamma, [o, \gamma o] \cap \Gamma K \subset K \cup \gamma K\} \subset \Gamma,$$

sorte de **groupe fondamental en dehors de K** .

L'**entropie à l'infini** est

$$\delta_\Gamma^\infty = \inf_{K \subset X} \delta_{\Gamma_K} \leq \delta_\Gamma.$$

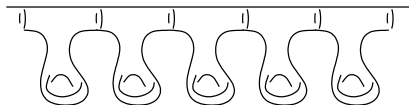
L'action de Γ sur X admet un **saut d'entropie à l'infini** quand

$$\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma.$$

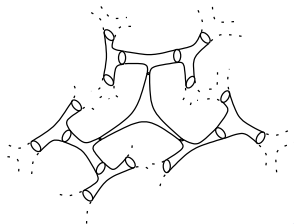
Nous appelons ces actions **fortement positivement récurrentes**.

Variétés avec (sans) saut d'entropie à l'infini

Exemples typiques **sans** saut d'entropie : revêtements infinis



Exemples typiques **avec** saut d'entropie : variétés compactes/convexe-cocompactes, variétés localement symétriques géométriquement finies, produits Schottky, surfaces à la Ancona, ...



Optimalité des hypothèses

Résultat **faux sans hyperbolicité** :

Γ groupe moyennable à croissance exp, $X = \text{Cay}(\Gamma)$, $\Gamma' = \{1\}$.
Alors $\delta_\Gamma > 0$ alors que $\delta_{\Gamma'} = 0$, et $\Gamma/\Gamma' = \Gamma$ est moyennable.

Sur les **espaces symétriques de rang supérieur**, si Γ/Γ' est moyennable, alors $\delta_\Gamma = \delta_{\Gamma'}$ (Glorieux-Tapie).

Résultat **faux sans saut d'entropie** :

Soit $S = X/\Gamma$ une surface à courbure négative sans saut d'entropie.
Par ex, S est le $\mathbb{Z}$ -revêtement d'une surface hyperbolique compacte.
On construit un $\mathbb{F}_2$ -revêtement $S' = X/\Gamma'$ de S en coupant S le long de deux courbes fermées disjointes non séparantes. Alors :

$$\delta_\Gamma \geq \delta_{\widehat{\Gamma}} \geq \delta_{\widehat{\Gamma}}^\infty = \delta_\Gamma^\infty = \delta_\Gamma.$$

La construction de Patterson-Sullivan

La **série de Poincaré**

$$P(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)}$$

a un **exposant critique** δ_Γ . Pour $s > \delta_\Gamma$, on construit une mesure sur $X \cup \partial X$

$$\nu^s = \frac{1}{P(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

Quand $s \rightarrow \delta_\Gamma$, on définit ν sur ∂X comme une valeur d'adhérence de ν^s . La mesure ν sur ∂X est quasi-invariante par Γ .

Le fibré unitaire tangent vérifie $T^1X \simeq \partial X \times \partial X \setminus \text{Diag} \times \mathbb{R}$

On construit une mesure produit Γ -invariante équivalente à $\nu \times \nu \times dt$

On obtient la *mesure de Bowen-Margulis* m_{BM} sur T^1X/Γ (ergodique, mélangeante...)

Stratégie de la preuve

Etape 1 : Série de Poincaré twistée $A(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)$.

Son **exposant critique** vérifie $\delta_\rho \in [\delta_{\Gamma'}, \delta_\Gamma]$ de sorte que pour $s > \delta_\rho$, $A(s) \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$.

Etape 2 : Construction d'une **mesure de Patterson-Sullivan twistée** a^ρ sur ∂X , non nulle, à valeurs dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$, comme limite faible de

$$\frac{1}{\|A(s)\|} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

Etape 3 : Quand $\delta_\rho = \delta_\Gamma$ et $\delta_\Gamma^\infty < \delta_\Gamma$, a^ρ est **absolument continue** / la mesure de Patterson-Sullivan classique ν .

Etape 4 : Par un **argument d'ergodicité**, on déduit que $a^\rho = \Psi \cdot \nu$ où $\Psi \in \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma/\Gamma'))$ est une « constante multiplicative ».

Etape 5 : Par construction de a^ρ et ν , Ψ "est à valeurs" dans l'ensemble des vecteurs presque invariants.

Etape 1 : La série de Poincaré twistée

Etudions $A(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)$.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma', \mathbb{R})$ a un **ordre partiel** compatible avec la norme : $\phi \geq 0$ si pour tout $y \in \Gamma/\Gamma'$, $\phi(y) \geq 0$.

Definissons le **cône positif** associé $\mathcal{H}_+$. Un opérateur borné $\mathcal{H}$ est **positif** s'il préserve $\mathcal{H}_+$. Tous les $\rho(\gamma)$ sont positifs.

La série de Poincaré $A(s)$ est **bornée** si $\exists M > 0$, t.q. pour tout ensemble fini $S \subset \Gamma$, $\|\sum_{\gamma \in S} e^{-sd(o, \gamma o)} \rho(\gamma)\| \leq M$. L'**exposant critique**

$$\delta_\rho = \inf\{s \in \mathbb{R}, A(s) \text{ est borné}\}$$

est bien défini. Facile de vérifier que

$$\delta_{\Gamma'} \leq \delta_\rho \leq \delta_\Gamma.$$

L'**hypothèse** $\delta_{\Gamma'} = \delta_\Gamma$ est utilisée seulement pour **garantir que**
 $\delta_\rho = \delta_\Gamma$.

Etape 2 : La mesure de Patterson-Sullivan twistée

Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma')$. On utilise un **ultrafiltre** nonprincipal $\omega : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$.

On construit un **Hilbert** plus grand $\mathcal{H}_\omega = \lim_\omega \mathcal{H}$, et on étend ρ en $\rho_\omega : \Gamma \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\omega)$. On a toujours un **ordre partiel** sur $\mathcal{H}_\omega$.

Une suite $\Phi = (\phi_n)$ de **vecteurs presque invariants** dans $\mathcal{H}^\mathbb{N}$ devient un **vecteur invariant** Φ par ρ_ω sur $\mathcal{H}_\omega$.

On choisit $s_n \rightarrow \delta_\rho$. Définie

$$a_n^\rho = \frac{1}{\|A(s_n)\|} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s_n d(o, \gamma o)} \rho(\gamma) \mathcal{D}_{\gamma o}.$$

Pour $f \in C(X \cup \partial X)$, $\int f da_n^\rho$ appartient à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, avec une norme uniformément bornée en n .

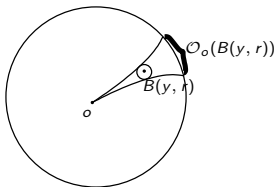
On définit $a^\rho : C(X \cup \partial X) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ positive, linéaire, continue par

$$a^\rho(f) := \lim_\omega \int f da_n^\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega).$$

Mesure non nulle sur ∂X à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$

Etape 3 : Absolue continuité (I)

Une **ombre** est $\mathcal{O}_o(B(y, r)) = \{\xi \in \partial X, (o\xi) \cap B(y, r) \neq \emptyset\}$.



La **mesure de Patterson-Sullivan classique** ν est une limite faible de $\frac{1}{P(s)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(o, \gamma o)} \mathcal{D}_{\gamma o}$.

Le **lemme de l'ombre de Sullivan** affirme que $\nu(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r))) \asymp e^{-\delta_{\Gamma} d(o, \gamma o)}$.

Un **demi-lemme de l'ombre** pour a^{ρ} : $\|a^{\rho}(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r)))\| \leq e^{-\delta_{\Gamma} d(o, \gamma o)}$.

Etape 3 : Absolue continuité (II)

Absolute continuité sur les ombres

$$\|a^\rho(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r)))\| \leq \nu(\mathcal{O}_o(B(\gamma o, r))).$$

Le **saut d'entropie** permet de montrer que les points qui appartiennent à une infinité d'ombre sont de ν -mesure et a^ρ -mesure pleines.

Seul endroit (clé) où nous utilisons le **saut d'entropie**.

Par un argument de type Vitali, nous déduisons que $0 \neq a^\rho \ll \nu$.

Pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, $a^\rho.\phi \ll \nu$.

Il existe une **dérivée de Radon-Nikodym** $D(\phi) \in L^\infty(X \cup \partial X, \mathcal{H})$, telle que

$$\int f \, d(a^\rho.\phi) = \int f \, D(\phi) \, d\nu.$$

Etape 4 : Ergodicité

* L'application $\phi \in \mathcal{H} \rightarrow D(\phi) \in L^\infty((\partial X, \nu), \mathcal{H}_\omega)$ est linéaire et vérifie

$$\rho(\gamma) \circ D(\phi) \circ \gamma^{-1} = D(\phi).$$

* L'application $(\xi, \eta) \in (\partial X)^2 \rightarrow \langle D(\phi)(\xi), D(\phi)(\eta) \rangle_{\mathcal{H}_\omega} \in \mathbb{R}$ est une application Γ -invariante à valeurs réelles.

→ La mesure $\nu \times \nu$ sur $\partial X \times \partial X$ est ergodique pour l'action de Γ

Idée: $T^1X \simeq \partial X \times \partial X \times \mathbb{R}$. La mesure de PS ν sur ∂X permet de construire la mesure de Bowen-Margulis $m_{BM} \sim \nu \times \nu \times dt$ sur T^1X/Γ . Par l'argument de Hopf, quand X est un espace $CAT(-1)$, c'est une mesure invariante ergodique pour le flot géodésique. Aussi **vrai pour X Gromov-hyperbolique** (stratégie à la Bader-Furman).

→ On déduit que $D(\phi)$ est $\nu \times \nu$ -p.s. constante.

Etape 5 : Conclusion

On sait que (pour tout $\phi \in \mathcal{H}_\omega$, par ex avec $\|\phi\| = 1$)

$$\rho(\gamma) \circ D(\phi) \circ \gamma^{-1} = D(\phi).$$

De plus, cette application définie sur $X \cup \partial X$ est ps constante.

On déduit pour tout $\gamma \in \Gamma'$ égalité dans $\mathcal{H}_\omega$

$$\rho(\gamma).D(\phi) = D(\phi)$$

Gagné! $D(\phi)$ est notre vecteur ρ -invariant dans $\mathcal{H}_\omega$.

Le sens « facile »

Critère de Kesten : toute marche aléatoire sur Γ/Γ' a un rayon spectral $= 1$.

On construit une suite de marches aléatoires associées aux mesures sphériques uniformes sur les sphères $S(e, n)$.

L'astuce dite de Barta : on peut estimer le rayon spectral sur les fonctions positives.

On majore uniformément en n les rayons spectraux par $\exp(n(\delta_{\Gamma'} - \delta_{\Gamma}))$.

Roblin avait besoin de $\Gamma' \triangleleft \Gamma$. Nous enlevons cette hypothèse mais utilisons $\delta_{\Gamma'}^{\infty} < \delta_{\Gamma}$