Dennis Sullivan, mathématicien des analogies

Petite incursion dans ses travaux

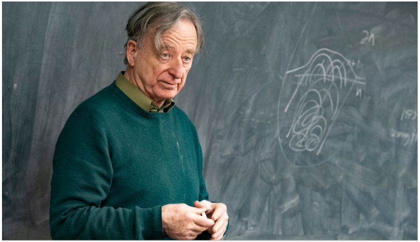
BNF, 5 février 2025

Barbara Schapira

IMAG, Université de Montpellier

Bio express

Mathématicien américain, né en 1941.
Etudes aux Etats-Unis. Chimie puis Maths.
Thèse 1966 *Triangulating Homotopy equivalences*
Conférence au *Congrès international des mathématiques* 1974
Professeur permanent à l'IHES, Bures-sur-Yvette et New York.



`Crédits photos : IHES https://www.ihes.fr/dennis-sullivan-prix-abel/ et`

`John Griffin/Stony Brook University https://abelprize.no/biography/biography-dennis-p-sullivan`

Prix Abel 2022

« Pour ses contributions révolutionnaires à la topologie dans son sens le plus large, et en particulier dans ses aspects algébriques, géométriques et dynamiques »

American Mathematical Society
MATHSCINET
MATHEMATICAL REVIEWS

Universite de Rennes I

Share | Edit Author Profile

Sullivan, Dennis P.

MR Author ID:	**168805**
Earliest Indexed Publication:	1966
Total Publications:	**134**
Total Related Publications:	**11**
Total Citations:	**5725**

⊞ Published as: Sjullivan, D. (1)

- Publications
- Related Publications
- Refine Search
- Co-Authors
- Collaboration Distance
- Mathematics Genealogy Project
- MacTutor History of Mathematics Archive
- Citations

Co-authors (by number of collaborations)

Aaronson, Jonathan Armstrong, Mark Anthony Besson, Gérard Bourguignon, Jean-Pierre Casson, Andrew J. Chas, Moira Cheeger, Jeff Cohen, Marshall M. Cohen, Ralph L. Connes, Alain Cooke, George E. Cui, Guizhen Curry, James H. Deligne, Pierre Dodziuk, Józef Donaldson, Simon Kirwan Ebin, David G. Edwards, Robert D. Gambaudo, Jean-Marc Gardiner, Frederick P. Ghys, Étienne Griffiths, Phillip A. Gromov, Mikhael Grove, Karsten Hardt, Robert M. Heinonen, Juha Jiang, Yun Ping Katznelson, Yitzhak Kazdan, Jerry L. Kostant, Bertram Lawrence, Ruth J. LeBrun, Claude R. Lundell,

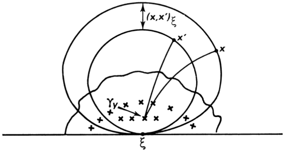
Un texte

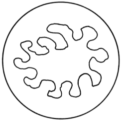
DENNIS SULLIVAN

The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 50 (1979), p. 171-202

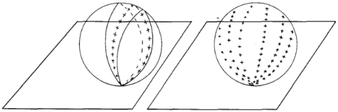
De l'algèbre, de la géométrie, de la dynamique. 379 citations!

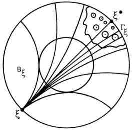


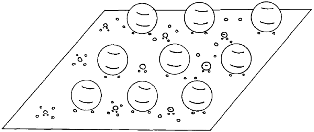


quasi-fuchsian

typical



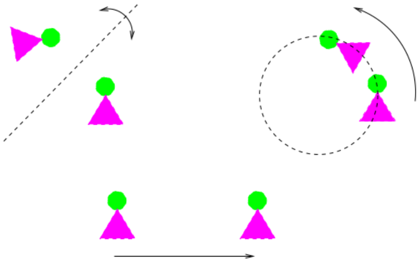




Commençons par de la géométrie

La géométrie euclidienne, c'est celle que vous connaissez depuis la maternelle, avec des Angles, droites, cercles, triangles,...

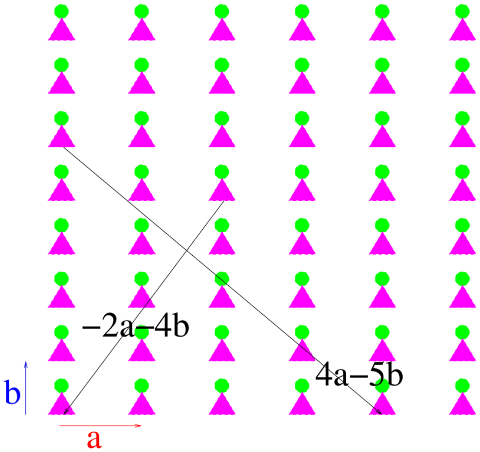
Vous savez faire des réflexions, rotations, translations.



Ces transformations sont appelées des isométries euclidiennes.

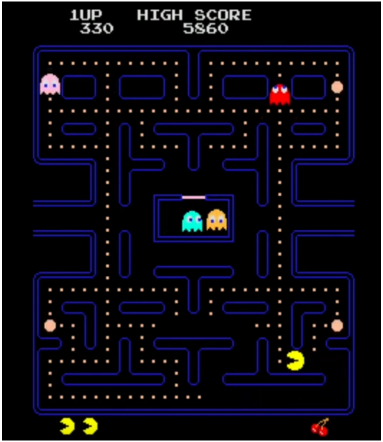
De la géométrie ... vers l'algèbre

Prenons deux isométries, appelons les a et b, et répétons-les.



L'ensemble des isométries obtenues en répétant a et b est un groupe d'isométries.

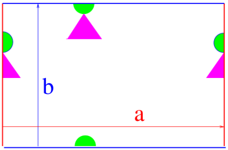
Un détour par les jeux vidéo ?

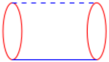


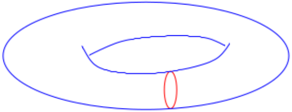
Quand Pacman sort par la gauche, il revient par la droite !

De la géométrie vers l'algèbre,... et la topologie

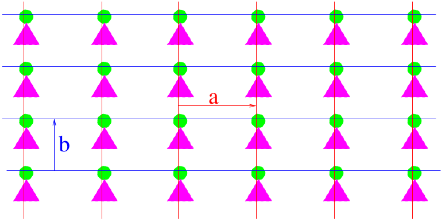
Pacman revisité par les mathématiques, ça donne un tore :





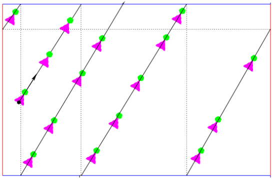


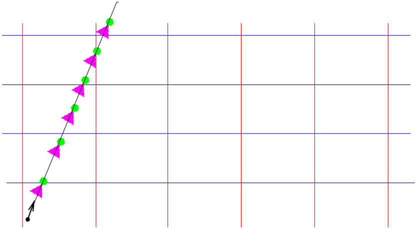
On y pense encore comme ça :



Géométrie, algèbre, topologie, et ... dynamique

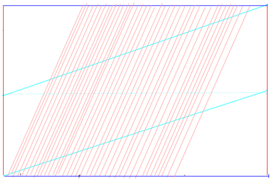
On fixe un point de départ et une vitesse initiale.
Le Flot géodésique suit les droites dans le tore

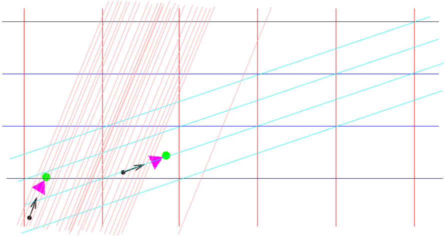




Dynamique sur le tore euclidien

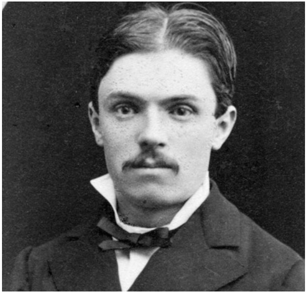
Exercice (L1) :
$\rightarrow$ Si le coefficient directeur est rationnel, le bonhomme retourne à son point de départ, sa trajectoire est périodique.
$\rightarrow$ Sinon, il visite tout le tore, sa trajectoire est dense dans le tore.





La géométrie hyperbolique, c'est plus rigolo

Poincaré : Supposons [...] un monde renfermé dans un grand cercle, et soumis aux lois suivantes : La température n'y est pas uniforme ; elle est maximale au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint le cercle où ce monde est renfermé.



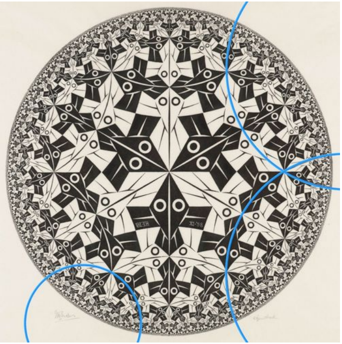
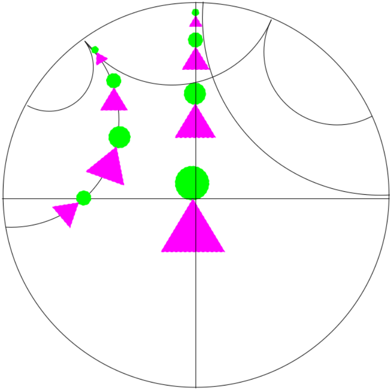


Image de Jos Leys https://images.math.cnrs.fr/Ceci-n-est-pas-une-geodesique.html

Pour aller tout droit, il faut tourner en rond !

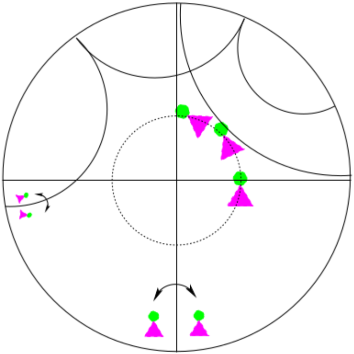
Dans cette géométrie, le plus court chemin d'un point à un autre, c'est un arc de cercle. On parle de géodésiques plutôt que de droites.

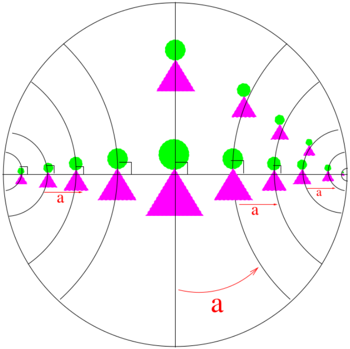


Le grand cercle extérieur représente l'horizon, il est infiniment loin.

Les isométries hyperboliques

Des réflexions, des rotations... et des hyperboliques

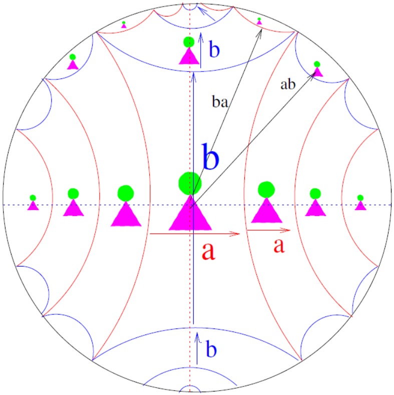




Les isométries hyperboliques translatent le long de leur axe et attirent tout l'espace vers l'extrémité attractive de l'axe.

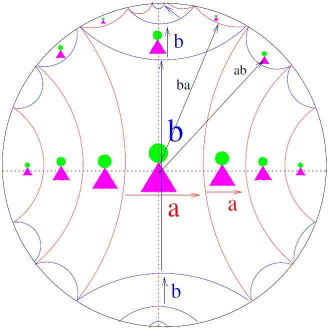
Et avec deux isométries hyperboliques ...

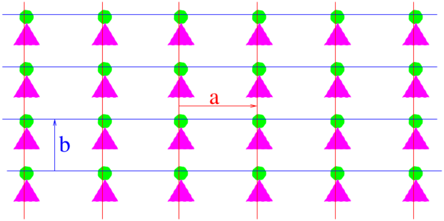
On considère deux isométries a d'axe horizontal, et b d'axe vertical. On les répète l'une après l'autre, et on obtient un **groupe d'isométries**.



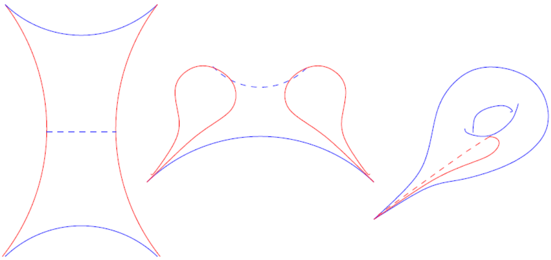
Surprise ! Faire d'abord a puis b ou d'abord b puis a ne mène pas du tout au même endroit!

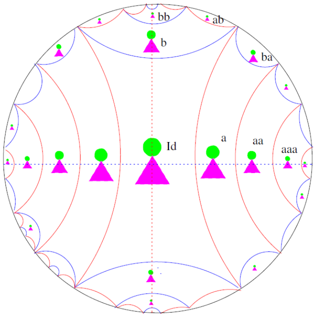
Les isométries hyperboliques ne “commutent” pas



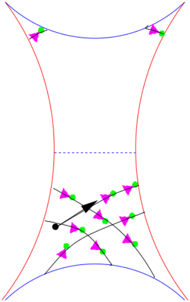


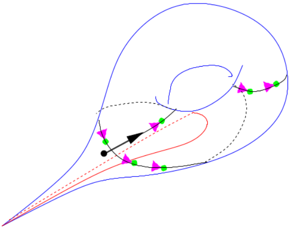
Un tore hyperbolique





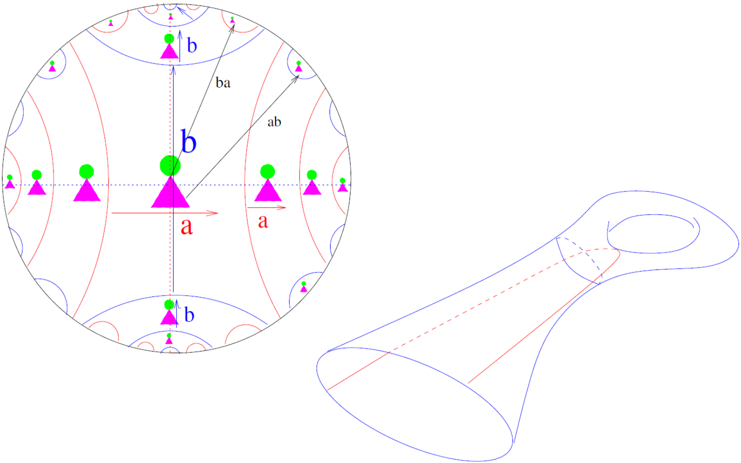
Dynamique sur un tore hyperbolique





Théorème (Hopf, 1930') Le flot géodésique est ergodique. Si on part d'un point au hasard, dans une direction au hasard, avec probabilité 1, la trajectoire est dense, elle visite tout le tore.
De plus, ces visites sont équiréparties : le temps moyen passé dans chaque région du tore est proportionnel à l'aire de cette région.

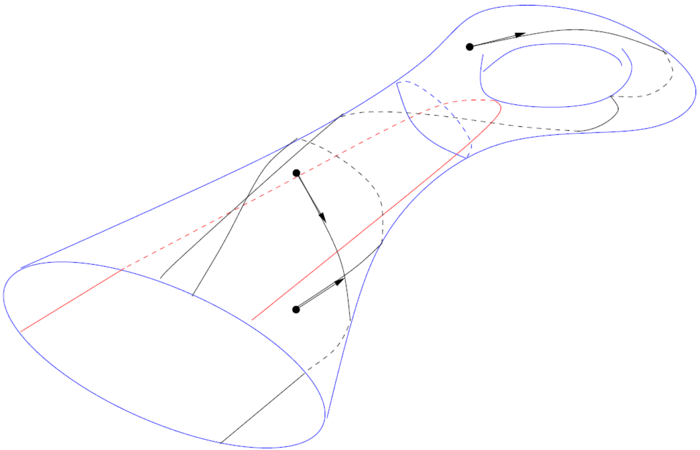
Deux isométries hyperboliques à peine différentes



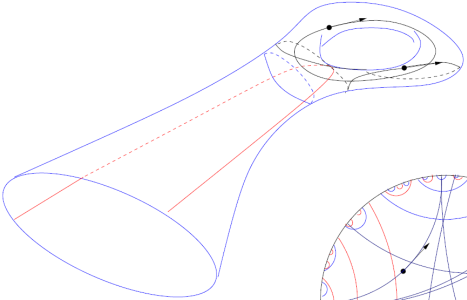
et le tore est d'aire infinie!

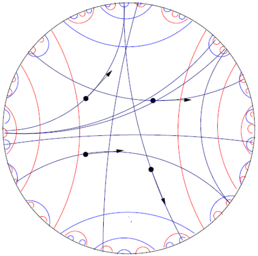
Que devient la dynamique, sur ce gros tore ?

Presque toutes les trajectoires filent tôt ou tard vers l'horizon.



Toutes ? Non ! Certaines trajectoires résistent encore et toujours à la tentation.

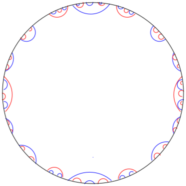


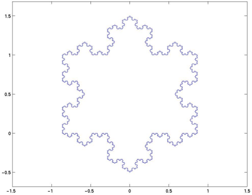


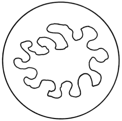
Les trajectoires qui, vues dans le disque, passent par une infinité de demi-disques, sont celles qui, vues dans le tore, ne fuient pas vers l'horizon.

L'ensemble limite

Les directions de ces trajectoires piégées forment une fractale

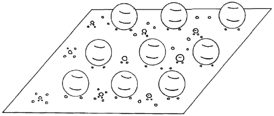






quasi-fuchsian

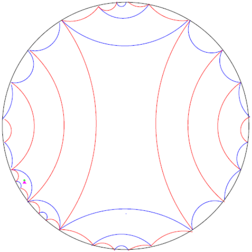
typical



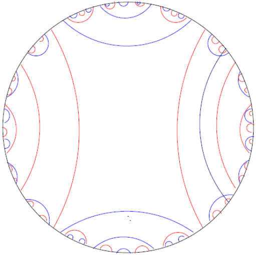
Cette fractale à l'horizon, à l'infini, est appelée ensemble limite.

Et Sullivan dans tout ça ?

Sullivan explique qu'il suffit de remplacer



par



Sullivan va remplacer le cercle par l'ensemble limite, et suivre les idées de Hopf.

One may follow Hopf's clear exposition ([8], pp. 873-876) sentence by sentence.

Hopf et l'essor de la théorie ergodique

En géométrie, on peut faire des probabilités.
La probabilité de l'événement "la trajectoire visite tout le tore" est

$$\frac{Vol(\{\text{vecteurs initiaux des trajectoires qui visitent tout le tore}\})}{Vol(\{\text{vecteurs initiaux de toutes les trajectoires}\})}$$

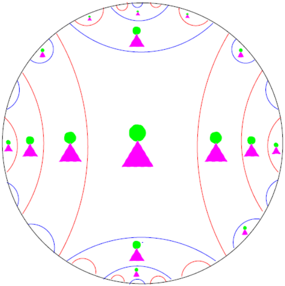
Hopf : Il suffit de regarder les extrémités des trajectoires dans le cercle limite à l'horizon

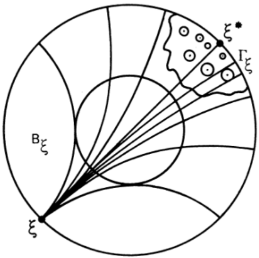
$$\frac{\text{Taille}(\{\text{ extrémités des bonnes trajectoires dans le cercle horizon}\}}{\text{taille}(\{\text{extrémités de toutes les trajectoires dans le cercle}\})(2\pi)}$$

Mesurer des fractales ?

Sullivan : comprend qu'il peut utiliser la mesure de Patterson sur l'ensemble limite, et suivre les raisonnements de Hopf.

Cette mesure de probabilité est construite en donnant un poids à chaque bonhomme, et en regardant à l'horizon le poids des ombres.





Un théorème pour conclure

Sullivan (1978) Le flot géodésique est ergodique. Si on part d'un point au hasard, dans une direction au hasard, avec probabilité 1, la trajectoire visitera tout le tore.
De plus, ces visites sont équiréparties : le temps moyen passé dans chaque région est proportionnel à la mesure (de Sullivan) de cette région.

Sullivan a compris en un temps record les travaux de ses contemporains : Thurston, Bowen, Patterson, et les a replacés dans un même paysage mathématique.

Il n'y a jamais de conclusion

MR4853270 - Twisted Patterson-Sullivan Measures and Applications to Amenability and Coverings
Coulon, Rémi; Dougall, Rhiannon; Schapira, Barbara; Tapie, Samuel
Mem. Amer. Math. Soc. **305** (2025), no. 1539, v+93 pp.
ISBN: 978-1-4704-7054-8; 978-1-4704-8041-7

MR4803663 - Patterson-Sullivan theory for groups with a strongly contracting element
Coulon, Rémi
Ergodic Theory Dynam. Systems **44** (2024), no. 11, 3216–3271.

MR4799467 - Patterson-Sullivan measures for transverse subgroups
Canary, Richard; Zhang, Tengren; Zimmer, Andrew
J. Mod. Dyn. **20** (2024), 319–377.